§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I – MỤC TIÊU

– Học sinh nắm được định nghĩa tích vô hướng, ý nghĩa vật lí của tích vô hướng và biểu thức toạ độ của nó.

– Học sinh sử dụng được các tính chất của tích vô hướng trong tính toán, biết chứng minh hai vectơ vuông góc bằng cách dùng tích vô hướng, biết sử dụng bình phương vô hướng của một vectơ.

II — NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Ta biết rằng không gian vectơ trên trường số thực là một tập hợp V (mà mỗi phần tử được gọi là một vectơ), trên đó đã xác định phép cộng hai vectơ và phép nhân vectơ với một số thực thoả mãn hệ tiên đề quen thuộc. Không gian vectơ V trở thành không gian vectơ Ơ-clit nếu trên đó đã xác định một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương, tức là với mỗi cặp vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều xác định một số thực $\vec{a}.\vec{b}$ sao cho các tiên đề sau đây được thoả mãn :

i) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (đối xứng) ;

ii) $\vec{a}.(m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a}.\vec{b} + n\vec{a}.\vec{c}$ (song tuyến tính) ;

iii) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$.

Khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ còn được gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Dùng tích vô hướng, ta có thể định nghĩa độ dài vectơ cũng như số đo góc giữa hai vectơ.

Muốn cho tập hợp các vectơ trong mặt phẳng hình học (đồng nhất các vectơ bằng nhau) trở thành một không gian vectơ Ơ-clit thì ta phải định nghĩa phép cộng hai vectơ, phép nhân vectơ với một số và tích vô hướng của hai vectơ sao cho các tiên đề của không gian vectơ Ơ-clit đều được thoả mãn.

Cố nhiên những điều trên không thể mang ra nói với học sinh được.

2. Có thể dẫn dắt học sinh đến khái niệm tích vô hướng của hai vectơ bằng cách nhắc lại khái niệm trong Vật lí là công sinh ra bởi một lực.

Sau khi đưa ra định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ, cần phải đưa ra nhiều ví dụ hoặc bài tập để làm cho học sinh biết cách tính toán. Cần chú ý kí hiệu tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ nhất thiết phải có dấu "." giữa hai vectơ.

3. Có nhiều cách định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ. Ngoài cách định nghĩa đã nêu trong SGK, còn có các cách định nghĩa tương đương sau :

a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$;

b) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$;

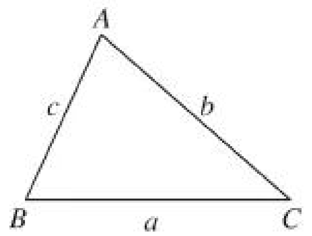
c) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$.

Các cách nói trên có ưu điểm là trong định nghĩa chỉ dùng độ dài của vectơ mà không dùng đến góc.

Áp dụng định nghĩa a) vào tam giác ABC (h. 13), ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2).$$



Hình 13

Trong phần bài tập ôn tập chương II có đưa vào các công thức a) và c) xem như các tính chất của tích vô hướng.

4. Công thức hình chiếu được đưa ra trong SGK, nó có thể được áp dụng trong các bài toán và được dùng để chứng minh tính phân phối của tích vô hướng :

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}. \qquad (*)$$

Tuy nhiên, chứng minh này khá phức tạp nên không được trình bày trong SGK. Chứng minh đó như sau :

Cố nhiên, nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì công thức (*) đúng, nên ta chỉ xét trường hợp $\vec{a} \neq \vec{0}$.

– Xét trường hợp cả ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Khi đó ta có các số k và l sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$, và $\vec{c} = l\vec{a}$. Bởi vậy

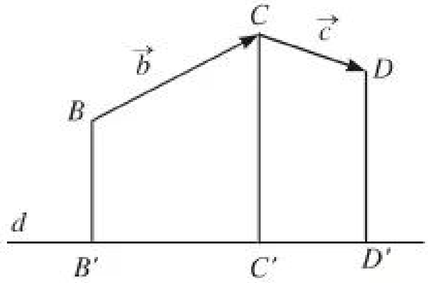
$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.(k\vec{a} + l\vec{a}) = \vec{a}.(k + l)\vec{a} = (k + l)\vec{a}^2.$$

Mặt khác ta có

$$\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.k\vec{a} + \vec{a}.l\vec{a} = k\vec{a}^2 + l\vec{a}^2 = (k + l)\vec{a}^2.$$

Vậy $\qquad \vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}.$

– Xét trường hợp tổng quát (h. 14) : Giả sử $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C, D trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$. Khi đó theo công thức hình chiếu ta có



Hình 14

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\overrightarrow{B'C'},\ \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\overrightarrow{C'D'},\ \vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\overrightarrow{BD} = \vec{a}.\overrightarrow{B'D'}.$$

Như vậy

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\overrightarrow{B'D'} = \vec{a}.(\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'}) = \vec{a}.\overrightarrow{B'C'} + \vec{a}.\overrightarrow{C'D'} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}.$$

5. Bình phương vô hướng là một trường hợp đặc biệt của tích vô hướng. Bình phương vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu theo thường lệ là $(\vec{a})^2$ và để đơn giản hơn, ta có thể kí hiệu là $\vec{a}^2$ (chứ không phải là $\overrightarrow{a^2}$). Ta chú ý rằng $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ *(bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó)*. Từ đó với hai điểm bất kì A và B ta có $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Góc giữa hai vectơ bằng 0^o khi hai vectơ cùng hướng, bằng 180^o khi hai vectơ ngược hướng.

1

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^{\circ}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^{\circ}$;

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 40^{\circ}$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 40^{\circ}$;

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 140^{\circ}$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 90^{\circ}$.

$\boxed{?2}$ Tích vô hướng của hai vectơ bằng 0 khi hai vectơ đó vuông góc.

$\boxed{?3}$ Có, suy từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$.

2 Chứng minh (1) :

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right).\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

Chứng minh (2) : Tương tự.

$\boxed{?4}$ Đẳng thức $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ nói chung không đúng, chỉ đúng khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Viết như sau mới đúng : $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \left(|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2.\cos^2(\vec{a}, \vec{b})$.

3

Phát biểu : Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng tích vô hướng của $\vec{a}$ với hình chiếu của $\vec{b}$ trên giá của $\vec{a}$.

4

a) $\vec{i}^2 = 1$; $\vec{j}^2 = 1$; $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

b) $\vec{a}.\vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$$= xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + x'y\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}^2 = xx' + yy'.$$

c) $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = x^2 + y^2$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

5

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

b) $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{1 + m^2}$;

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{5} = \sqrt{1 + m^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

4. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị dương khi hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc $(\vec{a}, \vec{b})$ bé hơn 90^o ; có giá trị âm khi hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc $(\vec{a}, \vec{b})$ lớn hơn 90^o ; bằng 0 khi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

5. 360^o.

6. a) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$; b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

7. Với điểm O nào đó ta có :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} =$

$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}).(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}).(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

Dùng tính phân phối của tích vô hướng để phá các dấu ngoặc, ta dễ dàng đi đến kết quả bằng 0.

Hệ quả : "*Ba đường cao trong một tam giác đồng quy*".

Thật vậy, từ đẳng thức trên ta suy ra : nếu $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} = 0$ thì $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$, hay nói cách khác : nếu $AD \perp BC$ và $BD \perp AC$ thì $CD \perp AB$. Điều đó chứng tỏ rằng nếu hai đường cao vẽ từ A và B của tam giác ABC cắt nhau tại D thì CD cũng là đường cao của tam giác đó.

8. Trong tam giác ABC ta có : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$. Bởi vậy tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 0$ hay khi và chỉ khi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 + 0 = AB^2$.

9. Chú ý tới giả thiết AD, BE, CF là các trung tuyến (chẳng hạn khi đó $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,...) ta có :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}$

$$= \overrightarrow{BC}.\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right) + \overrightarrow{CA}.\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}\right) + \overrightarrow{AB}.\left(\frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}) = 0.$$

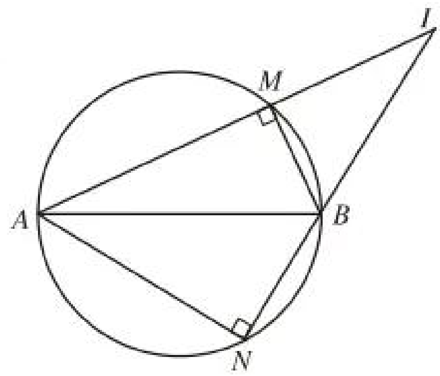
10. a) Ta chú ý rằng hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI là vectơ $\overrightarrow{AM}$, bởi vậy theo công thức hình chiếu ta có (h. 15) :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}.$$

Tương tự : $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}.$

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 4R^2.$



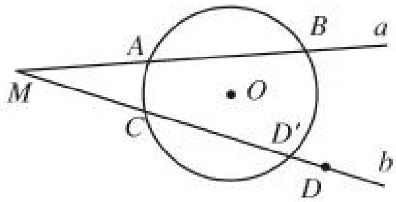
Hình 15

11. Gọi C và D' là các giao điểm của đường tròn tâm O qua ba điểm A, B, C với đường thẳng b (h. 16). Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$. Kết hợp với giả thiết đã cho ta được

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'},$$

suy ra $\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MD'}) = 0$

hay $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{D'D} = 0$.



Hình 16

Do $\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{D'D}$ cùng phương, $\overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$ nên $\overrightarrow{D'D} = \vec{0}$. Vậy D' trùng với D, ta được điều phải chứng minh.

12. Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AB (h. 17). Ta có

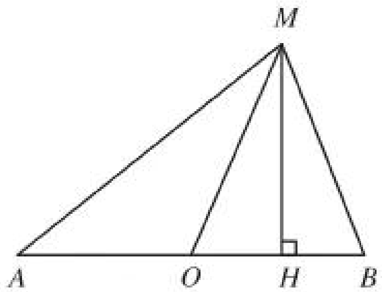
$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}.$$

Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OB, ta có

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB},$$

suy ra $MA^2 - MB^2 = 4\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB}.$



Hình 17

Do đó $MA^2 - MB^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} = k^2 \Leftrightarrow 4\overline{OH}.\overline{OB} = k^2.$

Từ đó suy ra H là điểm cố định trên đường thẳng AB, không phụ thuộc vị trí của M.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với OB tại H.

13. a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5).(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40.$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$; $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$.

Từ đó $|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4}$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

14. a) Ta có :

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} ;$$

$$AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} ;$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Vậy chu vi tam giác ABC là $6 + 6\sqrt{5} = 6(1 + \sqrt{5})$.

Do $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC thì $AH \perp BC$ và $H = (2 ; 1)$. Do đó

$$AH = \sqrt{(2+4)^2 + (1-1)^2} = 6.$$

Vậy diện tích S của tam giác ABC là :

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.6.6 = 18.$$

Lưu ý. Đối với học sinh khá, giỏi, GV có thể giới thiệu công thức

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}. \qquad (*)$$

Chứng minh (*) như sau :

Ta có $\qquad S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A.$

Do đó $4S^2 = AB^2AC^2\sin^2 A = \overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2(1-\cos^2 A)$

$$= \overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2 - \left(|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right)^2$$

$$= \overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2.$$ Từ đó suy ra (*).

b) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{-4+2+2}{3}; \dfrac{1+4-2}{3}\right)$ hay $G(0\,;\,1)$.

– H là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0. & (2) \end{cases}$

Gọi toạ độ của H là $(x\,;\,y)$, ta có :

$\overrightarrow{AH} = (x+4\,;\,y-1)$, $\overrightarrow{BC} = (0\,;\,-6)$, $\overrightarrow{BH} = (x-2\,;\,y-4)$, $\overrightarrow{AC} = (6\,;\,-3)$.

Khi đó :

$(1) \Leftrightarrow -6(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1$;

$(2) \Leftrightarrow 6(x-2) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - y + 4 = 0.$

Do $y = 1$, ta được $x = -\dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{1}{2}$. Vậy $H = \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

– I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA = IB & (3) \\ IB = IC & (4) \end{cases}$$

Gọi $I = (x\,;\,y)$ thì hệ (3), (4) tương đương với :

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 & (3') \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 & (4') \end{cases}$$

Từ (4') suy ra $y - 4 = -y - 2$ hay $y = 1$.

Thay $y = 1$ vào (3') được $(x+4)^2 = (x-2)^2 + 9$, giải ra ta được $x = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $I = \left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

– Ta có $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{1}{2}\,;0\right), \quad \overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{4}\,;\,0\right).$

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$ cùng phương (do cùng phương với $\vec{i}$), do đó G, I, H thẳng hàng.