§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I – MỤC TIÊU

– Kiến thức cơ bản mà học sinh cần nắm được là :

Định lí côsin, định lí sin trong tam giác và các hệ quả.

Các công thức tính độ dài trung tuyến và diện tích tam giác.

– Học sinh vận dụng được các định lí và công thức trên để giải các bài toán chứng minh và tính toán có liên quan đến độ dài trung tuyến, diện tích, chiều cao của tam giác ; đồng thời biết cách tính các góc, các cạnh chưa biết của tam giác khi đã biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa, hoặc một cạnh và hai góc kề.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Ở cấp THCS, học sinh đã được học các hệ thức lượng trong tam giác vuông. Chương này bổ sung thêm các hệ thức lượng trong tam giác bất kì.

2. Chúng ta đều biết định lí côsin là mở rộng của định lí Py-ta-go. Chúng ta không muốn áp đặt định lí đó cho học sinh rồi bắt họ chứng minh mà muốn họ có thể "tìm" ra công thức đó với sự giúp đỡ của thầy giáo.

3. Đối với định lí sin, SGK muốn giúp học sinh tìm được kết quả bằng cách suy đoán : Từ kết quả đúng cho trường hợp tam giác vuông, ta có thể đặt câu hỏi : Liệu kết quả đó có đúng với mọi tam giác hay không ? Đó là cách suy nghĩ thường gặp trong Toán học.

Tuy nhiên, ta lưu ý rằng chứng minh định lí sin trong SGK không dùng đến tích vô hướng. Nhưng vì định lí côsin và định lí sin thường được trình bày gắn kết với nhau khi nói về các hệ thức lượng trong tam giác, nên ta cũng trình bày định lí sin ở đây.

4. Nếu biết độ dài ba cạnh của tam giác thì có thể tính được độ dài các đường trung tuyến của tam giác đó bởi công thức khá đơn giản (so với công thức tính đường cao hay đường phân giác). Ngoài ra công thức đường trung tuyến còn liên quan đến việc tính tổng bình phương hai cạnh của tam giác và bài toán tìm tập hợp điểm có tổng bình phương các khoảng cách tới hai điểm cố định bằng một số không đổi.

5. Về cách tính diện tích tam giác thì học sinh đã biết công thức (1) ở lớp dưới. Các hoạt động 7, 8 và 9 sẽ giúp học sinh chứng minh các công thức (2), (3) và (4).

6. Ngoài một số công thức cần nhớ, mục này giúp học sinh luyện tập tính toán, và đây là dịp tốt để giúp các em sử dụng máy tính bỏ túi (MTBT) nếu có điều kiện. Ở những nơi không có MTBT thì có thể sử dụng bảng số. Nếu thậm chí không có cả bảng số thì giáo viên nên thay thế các dữ liệu của bài toán để học sinh không cần dùng bảng số. Chẳng hạn, ở Ví dụ 2 có thể thay ba cạnh của tam giác ABC là : $a = 2\sqrt{21}$, $b = 10$, $c = 8$, để được $\cos A = \dfrac{1}{2}$ và do đó $\widehat{A} = 60^{o}$.

7. Mỗi bài toán hoặc ví dụ trong tiết này xem như là một hoạt động. Ba Ví dụ 5, 6, 7 tương ứng với ba trường hợp : Giải tam giác khi biết một cạnh và hai góc kề của tam giác, biết hai cạnh và góc xen giữa, biết ba cạnh.

8. Hai Ví dụ 8, 9 có nội dung thực tế đưa về giải tam giác. Nếu bố trí được tiết đo đạc ngoài trời (kết hợp trong buổi dã ngoại) thì càng tốt.

9. Nếu có điều kiện, giáo viên nên hướng dẫn học sinh sử dụng MTBT loại CASIO *fx-220*, hoặc *fx-500A* hoặc *fx-500MS* (học sinh đã được học cách sử dụng ở cấp THCS). Để tính các biểu thức có nhiều phép tính, nên hướng dẫn cho học sinh cách ấn phím liên tiếp để tính chỉ một lần. Làm như vậy sẽ được kết quả chính xác hơn.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Vì góc A vuông nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

1

Ta có : $\quad \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$= AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

hay $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.$

2

Định lí có thể phát biểu như sau : Trong một tam giác, bình phương một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của chúng với côsin của góc xen giữa hai cạnh đó.

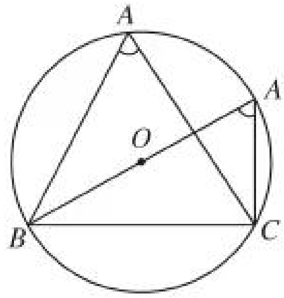
?2 Khi ABC là tam giác vuông, định lí côsin trở thành định lí Py-ta-go quen thuộc vừa nói trên.

3

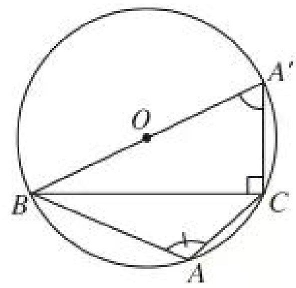
Từ định lí côsin dễ dàng viết được các công thức tính giá trị $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo ba cạnh của tam giác như SGK đã trình bày.

4

Trường hợp góc A nhọn (h. 18), ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$ (cùng chắn cung BC).



Hình 18



Hình 19

Trường hợp góc A tù (h. 19), ta có $\widehat{BAC} + \widehat{BA'C} = 180^o$ (tứ giác $ABA'C$ là tứ giác nội tiếp).

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có : $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BA'C}$.

Tam giác $A'BC$ vuông tại C, nên

$$a = BC = BA'.\sin A' = 2R\sin A.$$

Tương tự, ta cũng có $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$.

Như vậy, với mọi tam giác ABC, công thức (1) luôn đúng.

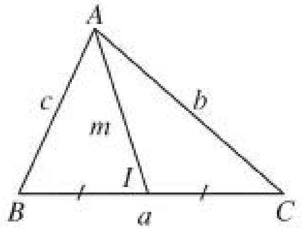
$\boxed{?3}$ Nếu $m = \dfrac{a}{2}$ thì tam giác ABC vuông tại A, nên

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = a^2.$$

5 (h. 20)

Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 2AI^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}). \end{aligned}$$



Hình 20

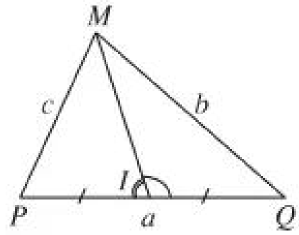
Vậy $AB^2 + AC^2 = 2m^2 + \dfrac{a^2}{2}$.

6 (h. 21)

Từ $MI^2 = \dfrac{k^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ suy ra

– Khi $\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} > 0$, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}\,.$$



Hình 21

– Khi $\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 0$, tập hợp cần tìm là điểm I.

– Khi $\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} < 0$, tập hợp cần tìm là tập rỗng.

7

Trong cả hai trường hợp như hình vẽ ở SGK, tam giác AHB có

$$h_a = c\sin B \Rightarrow S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

8

Thay $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ vào công thức $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$, ta được

$$S = \frac{1}{2}ab.\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

9

$S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr.$

10

Tam giác có ba cạnh 3, 4, 5 có diện tích $S = 6$.

Tam giác có ba cạnh 13, 14, 15 có diện tích $S = 84$.

Tam giác có ba cạnh 51, 52, 53 có diện tích $S = 1170$.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{13^2 + 15^2 - 12^2}{2.13.15} = \dfrac{25}{39}$. Suy ra $\widehat{A} \approx 50^o$.

16. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^o = 49$. Vậy $a = 7$.

Kết quả b) đúng.

17. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 120^o = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 120^o = 37$.

Suy ra : $BC = \sqrt{37} \approx 6{,}1$ km. Vậy Cường dự đoán sát thực tế nhất.

18. a) Trong tam giác ABC, góc A nhọn khi và chỉ khi $\cos A > 0$.

$$\cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

Chứng minh tương tự cho câu b) và c).

19. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \dfrac{b.\sin A}{\sin B} = \dfrac{4.\sin 60^o}{\sin 45^o} \approx 4{,}9$

$$\text{và } c = \frac{b.\sin C}{\sin B} = \frac{4.\sin 75^o}{\sin 45^o} \approx 5{,}5.$$

20. $R = \dfrac{a}{2.\sin A} = \dfrac{6}{2.\sin 60^o} \approx 3{,}5$.

21. $\sin A = 2\sin B.\cos C \Leftrightarrow \dfrac{a}{2R} = 2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c.$$

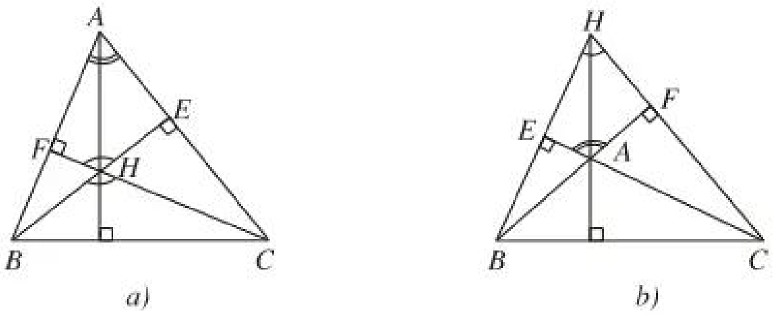
22. $\widehat{C} = 180^\circ - (62^\circ + 87^\circ) = 31^\circ$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AC = b = \frac{500.\sin 62^\circ}{\sin 31^\circ} \approx 857 \text{ (m)},$$

$$BC = a = \frac{500.\sin 87^\circ}{\sin 31^\circ} \approx 969 \text{ (m)}.$$

23. Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB. Theo hệ quả của định lí sin, trong tam giác ABC ta có :

$$R = \frac{a}{2.\sin A}.$$



Hình 22

Trong cả hai trường hợp : Góc A là góc nhọn (h. 22a), là góc tù (h. 22b), ta đều có

$$\widehat{EHF} + \widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Do đó $\sin\widehat{EHF} = \sin\widehat{BAC}$. Theo hệ quả của định lí sin, trong tam giác HBC ta có

$$R_1 = \frac{a}{2.\sin\widehat{BHC}} = \frac{a}{2.\sin\widehat{EHF}} = \frac{a}{2.\sin A} = R.$$

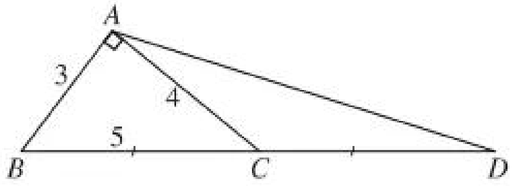
Tương tự ta cũng có $R_2 = R$, $R_3 = R$.

24. $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{8^2 + 6^2}{2} - \dfrac{7^2}{4} = 37{,}75.$

Suy ra $m_a \approx 6{,}1$.

25. Tam giác ABD có AC là trung tuyến (h. 23) nên

$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}.$$



Hình 23

Suy ra :

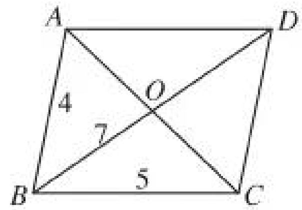
$$AD^2 = \frac{1}{2}(4AC^2 + BD^2 - 2AB^2) = \frac{1}{2}(4 \,.\, 4^2 + 10^2 - 2 \,.\, 3^2) = 73.$$

Vậy $AD \approx 8{,}5$.

26. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD (h. 24). Ta có :

$$AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

$$= \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} = 8{,}25.$$



Hình 24

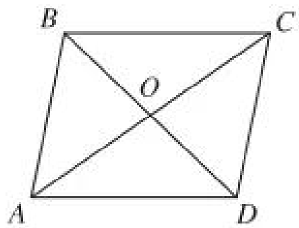
Suy ra : $AO \approx 2{,}9$ và $AC = 2AO \approx 5{,}8$.

27. Xét hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD (h. 25). Ta có :

$$AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4},$$

hay $$\frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}.$$

Suy ra $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.



Hình 25

28. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh :

$$5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5(2b^2 + 2c^2) - 5a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 + 9c^2 = 9a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A.

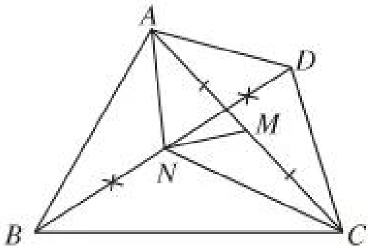
29. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.6,12.5,35.\sin 84^{\circ} \approx 16,3.$

30. (h. 26) Trong tam giác ABD ta có

$$AB^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Trong tam giác CBD ta có

$$CB^2 + CD^2 = 2CN^2 + \frac{BD^2}{2}.$$



Hình 26

Cộng hai đẳng thức trên ta được

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AN^2 + CN^2) + BD^2 \qquad (1)$$

Vì M là trung điểm của AC nên

$$NA^2 + NC^2 = 2NM^2 + \frac{AC^2}{2}.$$

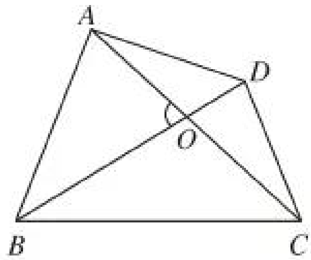
Thay vào (1), ta được

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(2MN^2 + \frac{AC^2}{2}\right) + BD^2$$

$$= AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

31. $S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C.$

32. Xét tứ giác $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử góc AOB là góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo bởi hai đường chéo của tứ giác (h. 27).



Hình 27

Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA. Khi đó diện tích tứ giác $ABCD$ bằng

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Ta có : $S_1 = \frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}$

$$S_2 = \frac{1}{2}OC.OB.\sin\widehat{COB}.$$

Vì $\widehat{COB} + \widehat{AOB} = 180^o$ nên $\sin\widehat{COB} = \sin\widehat{AOB}$.

Vậy $$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}OB.(AO + OC).\sin\widehat{AOB} = \frac{1}{2}OB.AC.\sin\widehat{AOB}.$$

Tương tự : $$S_3 + S_4 = \frac{1}{2}OD.AC.\sin\widehat{AOD}.$$

Lại có $\sin\widehat{AOB} = \sin\widehat{AOD}$, nên :

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}AC.(OB + OD)\sin\widehat{AOB} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\widehat{AOB}.$$

33. a) Ta có $\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^o - (60^o + 40^o) = 80^o$.

Từ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ suy ra

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{14.\sin 40^o}{\sin 80^o} \approx 9{,}1 \text{ và } a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^o}{\sin 80^o} \approx 12{,}3.$$

b) Tương tự câu a), ta được $\widehat{B} = 75^o$

$$a = \frac{b.\sin A}{\sin B} = \frac{4{,}5.\sin 30^o}{\sin 75^o} \approx 2{,}3.$$

Do $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên tam giác ABC cân tại A, suy ra $c = b = 4{,}5$.

c) $\widehat{B} = 20^o$.

$$a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{35.\sin 40^o}{\sin 120^o} \approx 26{,}0$$

và $$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{35.\sin 20^o}{\sin 120^o} \approx 13{,}8.$$

d) $\widehat{A} = 40^o$.

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{137{,}5.\sin 83^o}{\sin 40^o} \approx 212{,}3$$

và $$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{137{,}5.\sin 57^o}{\sin 40^o} \approx 179{,}4.$$

34. a) $\widehat{A} = \widehat{B} = (180^\circ - \widehat{C}) : 2 = (180^\circ - 54^\circ) : 2 = 63^\circ$.

Cạnh c có thể tính theo định lí sin hoặc côsin :

$$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{6{,}3.\sin 54^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 5{,}7$$

hoặc $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C = 6{,}3^2 + 6{,}3^2 - 2.6{,}3.6{,}3.\cos 54^\circ \approx 32{,}72$. Suy ra $c \approx 5{,}7$.

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 45^2 - 2.32.45.\cos 87^\circ \approx 2898{,}27$, suy ra $a \approx 53{,}8$.

$$\sin B = \frac{b.\sin A}{a} \approx \frac{32.\sin 87^\circ}{53{,}8} \approx 0{,}5940.$$

Rõ ràng góc B nhọn nên $\widehat{B} \approx 36^\circ$, $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 57^\circ$.

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^\circ \approx 784{,}98$. Suy ra $c \approx 28{,}0$.

$$\sin A = \frac{a.\sin C}{c} \approx \frac{7.\sin 130^\circ}{28} \approx 0{,}1915.$$

Vì góc A nhọn nên $\widehat{A} \approx 11^\circ$, $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 39^\circ$.

35. a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} \approx 0{,}7333 \Rightarrow \widehat{A} \approx 43^\circ$.

Tương tự tính được $\widehat{B} \approx 61^\circ$.

Suy ra $\widehat{C} \approx 180^\circ - 43^\circ - 61^\circ = 76^\circ$.

b) Tương tự câu a), ta tính được :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7{,}3^2 + 4{,}8^2 - 6^2}{2.7{,}3.4{,}8} \approx 0{,}5755. \text{ Suy ra } \widehat{A} \approx 55^\circ.$$

Tương tự tính được $\widehat{B} \approx 85^\circ$, $\widehat{C} \approx 180^\circ - 55^\circ - 85^\circ = 40^\circ$.

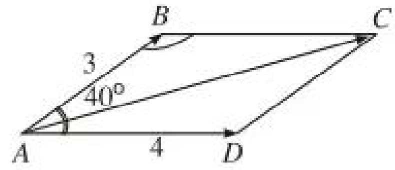
c) Tính tương tự câu a).

Đáp số : $\widehat{A} \approx 34^\circ$; $\widehat{B} \approx 44^\circ$; $\widehat{C} \approx 180^\circ - 34^\circ - 44^\circ = 102^\circ$.

36. (h. 28)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos 140^o$$

$$= 9 + 16 - 2.\ 3.\ 4.\cos 140^o \approx 43{,}39,$$



Hình 28

suy ra $AC \approx 6{,}6$.

Vậy cường độ lực tổng hợp là 6,6N.

37. $AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4^2 + 20^2 = 416$, nên $AB \approx 20{,}4$.

$$\sin\widehat{HAB} = \frac{HB}{AB} \approx \frac{20}{20{,}4} \approx 0{,}9804.$$

Vì góc A nhọn nên $\widehat{HAB} \approx 79^o$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{HAB}$ nên $\widehat{ABC} \approx 79^o$.

Suy ra $\widehat{ACB} \approx 56^o$. Trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{CB}{\sin 45^o} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow CB = \frac{20{,}4.\sin 45^o}{\sin 56^o} \approx 17{,}4 \text{ (m)}.$$

Vậy cây cao 17,4 m.

38. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 50^o - 40^o = 10^o$ và $\widehat{B} = 90^o - 50^o = 40^o$.

$$AC = b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{5.\sin 40^o}{\sin 10^o} \approx 18{,}5.$$

$$CD = AC.\sin 40^o \approx 11{,}9 \Rightarrow CH \approx 11{,}9 + 7 = 18{,}9 \text{ (m)}.$$

Vậy toà nhà cao 18,9 m.