§3 KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

I – MỤC TIÊU

– Học sinh nhớ được công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và công thức tính côsin của góc giữa hai đường thẳng.

– Viết được phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau. Biết cách kiểm tra xem hai điểm ở cùng phía hay khác phía đối với một đường thẳng.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Sau khi chứng minh công thức về khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng, SGK có đề cập đến điều kiện để hai điểm ở về một phía (hay hai phía) của đường thẳng. Đối với học sinh giỏi, có thể khai thác thêm về điều kiện để một điểm nằm trong một nửa mặt phẳng, trong một miền góc. Song khi dạy đại trà cho học sinh thì không nên đề cập những điều đó và nhất là không đưa ra khái niệm khoảng cách đại số.

2. Về góc giữa hai đường thẳng, SGK đưa ra định nghĩa truyền thống. Khi giảng dạy cần lưu ý hai điều sau :

– Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau là số đo của góc nhỏ nhất trong các góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

– Góc giữa hai đường thẳng không lớn hơn 90°.

Do đó khi so sánh góc giữa hai đường thẳng a, b với góc giữa hai vectơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ của chúng, có thể xảy ra hai khả năng $(a, b) = (\vec{u}, \vec{v})$ hoặc $(a, b) = 180^{\circ} - (\vec{u}, \vec{v})$.

Tuy nhiên, điều cơ bản và phải khắc sâu cho học sinh là công thức tìm côsin của góc giữa hai đường thẳng và áp dụng nó vào giải toán.

Trong trường hợp hai đường thẳng cho bởi phương trình theo hệ số góc lần lượt là $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$, thì góc φ giữa chúng được tính theo công thức $\cos\varphi = \dfrac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{\left(1 + k_1^2\right)\left(1 + k_2^2\right)}}$. Từ đó ta có các kết quả quen thuộc trong đại số :

Điều kiện vuông góc của hai đường thẳng là $k_1k_2 = -1$.

Điều kiện song song của hai đường thẳng là $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Áp dụng trực tiếp công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng :

$$d(M\,;\Delta) = \frac{|4.13 - 3.14 + 15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5.$$

b) Từ phương trình tham số của Δ, suy ra phương trình tổng quát của nó là

$$\Delta : 3x + 2y - 13 = 0. \text{ Do đó } d(M\,;\Delta) = \frac{|15 - 2 - 13|}{\sqrt{13}} = 0 \ (M \in \Delta).$$

Lưu ý. Từ phương trình tham số của Δ, ta có thể viết ngay phương trình của Δ dưới dạng $3(x - 7) + 2(y + 4) = 0$ rồi tính khoảng cách

$$d(M\,;\Delta) = \frac{|3(5 - 7) + 2(-1 + 4)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.$$

Qua đó lưu ý học sinh rằng nếu có phương trình đường thẳng Δ dạng

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

thì khoảng cách từ M đến Δ là

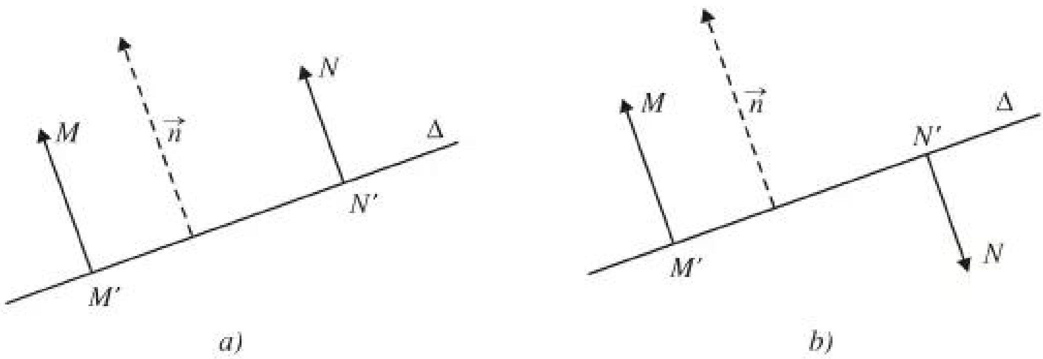
$$d(M\ ;\ \Delta) = \frac{|a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nếu có học sinh nhận xét được do $M \in \Delta$ nên $d(M\ ;\ \Delta) = 0$, thì giáo viên cũng nên cho học sinh kiểm tra lại nhận xét này bằng cách dùng công thức tính khoảng cách.

?1 Do $\overrightarrow{M'M} = k\vec{n}$, $\overrightarrow{N'N} = k'\vec{n}$ nên :

– Khi k, k' cùng dấu thì $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ cùng hướng, tức là M, N ở về một phía đối với Δ (h. 35a).

– Khi k, k' khác dấu thì $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ ngược hướng, tức là M, N ở về hai phía đối với Δ (h. 35b).



Hình 35

2

Để ý rằng, cạnh của tam giác cắt Δ khi hai đầu mút của cạnh đó ở về hai phía của Δ hoặc một đầu mút của cạnh nằm trên Δ. Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào vế trái của phương trình Δ và rút gọn, ta được các số 2 ; 9 ; – 9. Vậy Δ cắt các cạnh AC và BC, Δ không cắt cạnh AB.

3

Ta có $$d(M\ ;\ \Delta_1) = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

$$d(M\ ;\ \Delta_2) = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

M thuộc phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 khi và chỉ khi

$$d(M\ ;\ \Delta_1) = d(M\ ;\ \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Từ đó đi đến công thức cần chứng minh.

$\boxed{?2}$ $(a, b) = 60^\circ$;

$(a, b) = (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ - (\vec{u}', \vec{v})$.

4

Δ nhận $\vec{u} = (-2\ ;\ -1)$ là một vectơ chỉ phương,

Δ' nhận $\vec{u}' = (1\ ;\ 3)$ là một vectơ chỉ phương.

Ta có $\qquad \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \dfrac{-5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

suy ra $\qquad (\vec{u}, \vec{u}') = 135^\circ$, do đó $(\Delta, \Delta') = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

5

$\vec{u}_1 = (b_1\ ;\ -a_1)$, $\vec{u}_2 = (b_2\ ;\ -a_2)$.

Do (Δ_1, Δ_2) bằng hoặc bù với $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ nên $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$.

Từ đó đi đến

a) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|b_1b_2 + a_1a_2|}{\sqrt{b_1^2 + a_1^2}.\sqrt{b_2^2 + a_2^2}} = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \cos(\Delta_1, \Delta_2) = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

6

Gọi φ là góc giữa Δ_1 và Δ_2. Khi đó :

a) $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ hay $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

b) $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 26^\circ 34'$.

c) $\cos\varphi = \dfrac{9}{\sqrt{130}} \Rightarrow \varphi \approx 37^\circ 52'$.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. Các mệnh đề b), c), e) đúng. Hai mệnh đề a) và d) sai.

16. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3\ ;\ 7)$,

$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{21}{29} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 43^o36'.$$

Các đường thẳng AB, AC lần lượt có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ mà $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 90^o$ nên

$$(AB, AC) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 43^o36'.$$

17. Đặt $M = (x\ ;\ y)$ trên đường thẳng song song và cách đều đường thẳng đã cho, khi đó :

$$d(M\ ;\ \Delta) = h \Leftrightarrow \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = h \Leftrightarrow |ax + by + c| = h.\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} ax + by + c + h\sqrt{a^2 + b^2} = 0 & (1) \\ ax + by + c - h\sqrt{a^2 + b^2} = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Tập hợp các điểm M là hai đường thẳng có phương trình (1) và (2). Hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng đã cho.

18. *Cách 1*. Gọi Δ là đường thẳng đi qua P và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a\ ;\ b)$.

Khi đó ta có $\Delta : a(x - 10) + b(y - 2) = 0$.

$$d(A\ ;\ \Delta) = d(B\ ;\ \Delta) \Leftrightarrow \frac{|-7a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-15a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

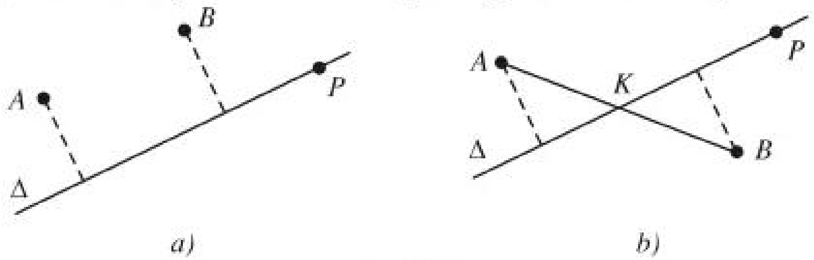
$$\Leftrightarrow |7a + 2b| = |15a - 2b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7a + 2b = 15a - 2b \\ 7a + 2b = -15a + 2b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2a - b = 0 & (1) \\ a = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Với (1), ta có thể lấy $a = 1$ và $b = 2$. Khi đó phương trình của Δ là $x + 2y - 14 = 0$.

Với (2), ta có thể lấy $b = 1$. Khi đó phương trình của Δ là $y - 2 = 0$.



Hình 36

Cách 2. (Sử dụng kiến thức lớp 8). Xét hai trường hợp :

Nếu A, B ở về một phía của Δ thì $d(A\,;\Delta) = d(B\,;\Delta) \Leftrightarrow \Delta \,//\, AB$ (h. 36a).

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8\,;4) = 4(-2\,;1)$ là vectơ chỉ phương của Δ, do đó phương trình của Δ là

$$\frac{x-10}{-2} = \frac{y-2}{1} \text{ hay } x + 2y - 14 = 0.$$

Nếu A, B ở về hai phía của Δ thì $d(A\,;\Delta) = d(B\,;\Delta)$ khi và chỉ khi Δ đi qua trung điểm K của AB (h. 36b).

Ta có $K = (-1\,;2)$, $\overrightarrow{PK} = (-11\,;0)$, suy ra phương trình của Δ là $y - 2 = 0$.

19. Giả sử đường thẳng cắt Ox tại A, cắt Oy tại B, bài toán đưa về tìm $A(a\,;0)$ và $B(0\,;b)$ sao cho

$$\begin{cases} MA = MB & (1) \\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 90^{\circ}. & (2) \end{cases}$$

$\overrightarrow{MA} = (a-2\,;-3)$, $\overrightarrow{MB} = (-2\,;b-3)$.

$(1) \Leftrightarrow (a-2)^2 + 9 = 4 + (b-3)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a = b^2 - 6b$.

$(2) \Leftrightarrow 2(a-2) + 3(b-3) = 0 \Leftrightarrow 2a + 3b - 13 = 0$.

Hệ $\begin{cases} 2a + 3b - 13 = 0 \\ a^2 - 4a = b^2 - 6b \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại đường thẳng thoả mãn điều kiện bài toán.

20. *Cách 1*. Gọi $\vec{n} = (a\,;b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ cần tìm.

Khi đó $(\Delta, \Delta_1) = (\Delta, \Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{10(a^2+b^2)}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|a + 2b| = |3a - b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = (1 + \sqrt{2})b \\ a = (1 - \sqrt{2})b. \end{array}\right.$$

Cho $b = 1$ thì $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

Vậy có hai đường thẳng :

$$\Delta : (1 + \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$$

và $$\Delta' : (1 - \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$$

thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Cách 2. Giả sử đường thẳng Δ cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B. Gọi I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 thì tam giác IAB là tam giác cân tại đỉnh I khi Δ vuông góc với đường phân giác trong của góc AIB.

Để giải bài toán, ta viết phương trình các đường phân giác của các góc đỉnh I rồi viết phương trình đường thẳng đi qua P và vuông góc với một trong hai đường phân giác đó.

Phương trình hai đường phân giác là :

$$\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} - \frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} = 0, \qquad (m_1)$$

$$\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} + \frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} = 0 \qquad (m_2)$$

hay $$m_1 : \quad (\sqrt{2} - 3)x + (2\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$m_2 : \quad (\sqrt{2} + 3)x + (2\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0.$$

Có hai đường thẳng cần tìm với phương trình lần lượt là :

$$\frac{x - 3}{\sqrt{2} - 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} + 1},$$

$$\frac{x - 3}{\sqrt{2} + 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} - 1}.$$

Chú ý rằng

$$\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-3} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+3)}{-7} = \frac{7+7\sqrt{2}}{-7} = -(\sqrt{2}+1)$$

và

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+3} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-3)}{-7} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-7} = \sqrt{2}-1,$$

nên ta lại trở về hai phương trình tìm được ở cách 1.