§4 ĐƯỜNG TRÒN

I – MỤC TIÊU

– Viết được phương trình đường tròn trong một số trường hợp đơn giản.

– Xác định được tâm và bán kính của đường tròn có phương trình dạng

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$

Biết được khi nào phương trình

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (2)$$

là phương trình đường tròn và chỉ ra được tâm, bán kính của đường tròn đó.

– Viết được phương trình tiếp tuyến của đường tròn khi biết một điểm thuộc tiếp tuyến hoặc phương của tiếp tuyến đó.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Phương trình đường tròn được xây dựng như trong SGK Hình học 12 chỉnh lí năm 2000 và có hai dạng (1), (2) nói trên.

2. So với SGK Hình học trước đây, SGK lần này có hai thay đổi :

Thứ nhất, không trình bày biểu thức toạ độ phương tích của một điểm đối với đường tròn và phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm. Những điều đó được đưa vào bài tập nhằm liên hệ với chương II.

Thứ hai, SGK lần này có đưa các bài toán, ví dụ về tìm phương trình tiếp tuyến của đường tròn. Giáo viên cần yêu cầu các em nhớ cách tìm phương trình tiếp tuyến và điều cơ bản là cần rèn luyện kĩ năng thông qua các ví dụ, các bài toán.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm P đi qua Q có bán kính là

$$R = PQ = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52}.$$

Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 52$.

b) PQ là đường kính nên bán kính của đường tròn bằng $\frac{1}{2}PQ$ và tâm của đường tròn là trung điểm của đoạn PQ. Ta có

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{52} = \sqrt{13} \text{ ; trung điểm của } PQ \text{ là } O(0\ ;\ 0).$$

Vậy phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 13$.

2

Khi $a^2 + b^2 < c$ thì $a^2 + b^2 - c < 0$, tập hợp các điểm M là rỗng.

Khi $a^2 + b^2 = c$ thì $a^2 + b^2 - c = 0$, tập hợp các điểm M chỉ gồm một điểm có toạ độ $(-a\ ;\ -b)$.

Vậy (2) chỉ là phương trình đường tròn khi $a^2 + b^2 > c$.

$\boxed{?}$ a), b) là phương trình của đường tròn, c), d), e) không là phương trình đường tròn.

3

Dễ thấy đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm $I\left(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $O(0\ ;\ 0)$. Tiếp tuyến tại O của ($\mathscr{C}$) là đường thẳng đi qua O và nhận $\overrightarrow{OI}$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình tiếp tuyến tại O là

$$\frac{3}{2}(x-0) - \frac{1}{2}(y-0) = 0 \quad \text{hay } 3x - y = 0.$$

4

Đường thẳng Δ' song song với Δ có phương trình $3x - y + c = 0$ với $c \neq 2$.

Đường tròn có tâm $I(2 ; -3)$, bán kính $R = 1$. Đường thẳng Δ' là tiếp tuyến của đường tròn khi và chỉ khi

$$d(I ; \Delta') = 1 \Leftrightarrow \frac{|3.2 - (-3) + c|}{\sqrt{10}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |c + 9| = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow c = -9 + \sqrt{10} \text{ hoặc } c = -9 - \sqrt{10}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm với phương trình là

$$3x - y - 9 + \sqrt{10} = 0 \text{ và } 3x - y - 9 - \sqrt{10} = 0.$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

21. a) Đúng, do $a^2 + b^2 - c = \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{(p-1)^2}{4} - 0 > 0 \ \forall p$.

Câu b) và d) đúng.

Câu c) sai.

22. a) Bán kính đường tròn là $R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$.

b) Bán kính đường tròn là $R = d(I ; \Delta) = \dfrac{|2.(-2) - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x+2)^2 + y^2 = 5$.

23. a) $I(1 ;1)$, $R = 2$.

b) $I(2 ; 3)$, $R = \sqrt{11}$.

c) $I\left(\dfrac{5}{4} ; 1\right)$, $R = \dfrac{1}{4}\sqrt{33 - 8m^2}$ với điều kiện $|m| < \sqrt{\dfrac{33}{8}}$.

24. *Cách 1*. Chú ý đến toạ độ của ba điểm, tam giác MNP là tam giác vuông đỉnh N, đường tròn ngoại tiếp tam giác có đường kính MP.

Cách 2. Gọi $I(a ; b)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn cần tìm. Khi đó phương trình đường tròn có dạng

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Do đường tròn đi qua M, N, P nên ta có hệ

$$\begin{cases}(1-a)^2+(-2-b)^2=R^2 & (1')\\(1-a)^2+(2-b)^2=R^2 & (2')\\(5-a)^2+(2-b)^2=R^2. & (3')\end{cases}$$

Dễ dàng giải được hệ bằng cách trừ theo vế (1') và (2') ; (2') và (3') để tìm a, b. Sau đó thay a, b vừa tìm được vào một trong các phương trình đó để tìm R^2.

Chú ý. Giáo viên cần lưu ý học sinh tránh khai triển ba phương trình trên làm cho việc giải trở nên phức tạp.

Cách 3. Viết phương trình hai đường trung trực, chẳng hạn của MN và NP rồi giải hệ phương trình để tìm toạ độ tâm.

ĐS : $(x-3)^2+y^2=8$.

25. a) Để ý rằng điểm (2 ; 1) nằm trong góc xOy nên đường tròn qua điểm (2 ; 1) chỉ có thể tiếp xúc với hai trục lần lượt tại các điểm thuộc các tia Ox, Oy. Từ đó, nếu gọi $I(a\ ;\ b)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn thì phương trình của đường tròn là

$$(x-a)^2+(y-\text{b})^2=R^2 \text{ với } a>0,\ b>0.$$

Vì đường tròn tiếp xúc với Ox và Oy nên $a=b=R$.

Kết hợp với điều kiện đường tròn đi qua điểm (2 ; 1) ta có phương trình :

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2 \Leftrightarrow a=1\ ;\ a=5.$$

Với $a=1$ ta có phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Với $a=5$ ta có phương trình đường tròn là $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

Chú ý. Nếu không có nhận xét ban đầu ($a>0$, $b>0$) ta phải giải hệ

$$\begin{cases}(2-a)^2+(1-b)^2=a^2\\|a|=|\text{b}|.\end{cases}$$

Khi $a=b$ ta được kết quả trên. Khi $a=-b$ hệ vô nghiệm.

b) Tương tự như câu a), phương trình đường tròn tiếp xúc với Ox có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2.$$

Từ điều kiện đường tròn đi qua hai điểm đã cho, ta có hệ :

$$\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2 & (1)\\ (1-a)^2+(4-b)^2=b^2. & (2)\end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $a=3,\ b=\frac{5}{2}$ hoặc $a=-1$; $b=\frac{5}{2}$.

Vậy có hai đường tròn cần tìm là :

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

26. Thay x, y từ phương trình tham số của Δ vào phương trình đường tròn, ta được

$$(2t)^2+(t-4)^2=16$$

$$\Leftrightarrow 5t^2-8t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{8}{5}.\end{array}\right.$$

Ứng với các giá trị tìm được của t, ta có hai giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$ là $(1\ ;-2)$ và $\left(\frac{21}{5}\ ;-\frac{2}{5}\right)$.

27. Đường tròn có tâm $O(0\ ;0)$, bán kính $R=2$.

a) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $3x-y+c=0$, $c\neq 17$. Sử dụng điều kiện tiếp xúc, ta có

$$\frac{|c|}{\sqrt{10}}=2 \ \Rightarrow\ c=\pm 2\sqrt{10}.$$

ĐS : $3x-y+2\sqrt{10}=0$ và $3x-y-2\sqrt{10}=0$.

b) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $2x-y+c=0$. Từ đó ta có :

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}}=2 \ \Rightarrow\ c=\pm 2\sqrt{5}.$$

ĐS : $2x-y+2\sqrt{5}=0$ và $2x-y-2\sqrt{5}=0$.

c) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình :

$$a(x-2)+b(y+2)=0\ (a^2+b^2\neq 0).$$

Từ điều kiện tiếp xúc, ta có $\dfrac{|-2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$ và đi đến $a.b=0$.

Nếu $a=0$ thì $b\neq 0$, ta được tiếp tuyến $y+2=0$.

Nếu $b=0$ thì $a\neq 0$, ta được tiếp tuyến $x-2=0$.

28. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là $I=(2\,;-1)$ và bán kính $R=2$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ bằng $\dfrac{|m+5|}{\sqrt{10}}$. Từ đó ta có

– Δ cắt $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi

$$\frac{|m+5|}{\sqrt{10}}<2 \Leftrightarrow -5-2\sqrt{10}<m<-5+2\sqrt{10}$$

– Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $m=-5\pm 2\sqrt{10}$.

– Δ và $(\mathscr{C})$ không có điểm chung khi và chỉ khi

$$m<-5-2\sqrt{10} \text{ hoặc } m>-5+2\sqrt{10}.$$

29. Toạ độ giao điểm của hai đường tròn (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-1=0 \\ x^2+y^2-2x+2y-7=0. \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được $4x+6=0$, suy ra $x=-\dfrac{3}{2}$.

Thay $x=-\dfrac{3}{2}$ vào phương trình đầu dẫn đến

$$y^2+2y-\frac{7}{4}=0.$$

Phương trình có hai nghiệm $\dfrac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$.

Vậy có hai giao điểm với toạ độ là :

$$\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right) \text{ và } \left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{2+\sqrt{11}}{2}\right).$$