§4 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

I – MỤC TIÊU

Học sinh cần :

– Nắm được định nghĩa tích của một vectơ với một số. Khi cho một số k và một vectơ $\vec{a}$ cụ thể, học sinh phải hình dung ra được vectơ $k\vec{a}$ như thế nào (phương, hướng và độ dài của vectơ đó).

– Hiểu được các tính chất của phép nhân vectơ với số và áp dụng trong các phép tính.

– Nắm được ý nghĩa hình học của phép nhân vectơ với số : Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$. Từ đó suy ra điều kiện để ba điểm thẳng hàng.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Để có được tích của một vectơ với một số, chúng ta đã giới thiệu trường hợp số đó là 2 và -2, từ đó đi đến trường hợp tổng quát là nhân một vectơ với một số bất kì. Sau khi nêu định nghĩa tổng quát, nên có nhiều ví dụ để học sinh nắm vững khái niệm này. Ví dụ : nhân vectơ $\vec{u}$ với -1, ta được vectơ như thế nào ?

2. Chúng ta đã bỏ qua, không trình bày chứng minh các tính chất của phép nhân vectơ với số, vì các tính chất này có vẻ hiển nhiên, và tương tự như nhân một số với một số. Chúng ta chỉ nêu ra một kiểm chứng đơn giản.

Để kiểm tra sự tiếp thu của học sinh, giáo viên có thể nêu ra những câu hỏi đơn giản, chẳng hạn : "*Hãy giải thích vì sao có thể viết* $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$".

Câu trả lời là : $\vec{a} + \vec{a} = 1\vec{a} + 1\vec{a} = (1 + 1)\vec{a} = 2\vec{a}$ (tính chất 2).

3. Hai Bài toán 1 và 2 là hai trường hợp đơn giản của khái niệm *trọng tâm của một hệ hữu hạn điểm*. Định nghĩa khái niệm đó như sau : Cho hệ hữu hạn điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Khi đó có duy nhất một điểm G sao cho $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Điểm G gọi là *trọng tâm của hệ điểm* đã cho. Khi đó với mọi điểm M ta đều có

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MG}.$$

Thật vậy, lấy một điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + ... + \overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}).$$

Vậy điểm G được xác định.

Nếu M là điểm bất kì thì

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_n}$$

$$= n\overrightarrow{MG}.$$

4. Theo định nghĩa, nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ luôn luôn cùng phương. Bây giờ ta giải quyết vấn đề ngược lại : Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì có thể suy ra $\vec{b} = k\vec{a}$ hay không ? Câu trả lời là có, nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ (điều kiện $\vec{a} \neq \vec{0}$ là hiển nhiên, vì nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì $k\vec{a}$ luôn luôn là vecto $\vec{0}$, nó không thể bằng vectơ $\vec{b}$ nếu $\vec{b} \neq \vec{0}$).

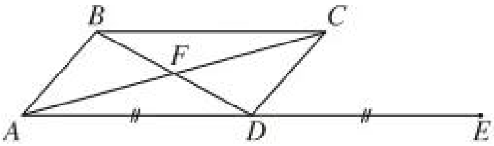
Có thể nêu ra mệnh đề tổng quát hơn và đẹp hơn : "Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có hai số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$". Tuy nhiên SGK không trình bày mệnh đề này.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1 (h. 5)

a) E là điểm đối xứng với A qua điểm D.

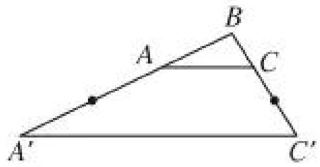
b) F là tâm của hình bình hành.



Hình 5

2 (h. 6)

a) và b) : xem hình vẽ.



Hình 6

c) Hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $A'C' = 3AC$, vậy $\overrightarrow{A'C'} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC'} = 3\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Bởi vậy, từ $3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ ta suy ra $3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $3(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} - 3\vec{b}$.

3

a) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, $\quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$, $\quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$.

b) Vậy : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$

$$= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Vậy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$\boxed{?1}$ $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$; $\vec{c} = -\frac{5}{2}\vec{a}$; $\vec{b} = \left(-\frac{3}{5}\right)\vec{c}$; $\vec{x} = (-3)\vec{u}$; $\vec{y} = (-1)\vec{u}$.

$\boxed{?2}$ Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì hiển nhiên không có số k nào để $\vec{b} = k\vec{a}$.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

21. Dựng tổng hoặc hiệu các vectơ theo các quy tắc đã biết, rồi dùng định lí Py-ta-go để tính độ dài các vectơ tổng.

Đáp số : $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = a\sqrt{2}$; $\left|3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}\right| = 5a$;

$$\left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{541}}{4}a \ ; \quad \left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{6073}}{28}a.$$

22. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0.\overrightarrow{OB}$; $\quad \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$;

$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\quad \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

23. Vì N là trung điểm của CD nên ta có

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

(vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$).

Phần còn lại chứng minh tương tự.

24. Gọi G' là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}.$$

Kết hợp với giả thiết $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, ta có $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. Suy ra G trùng với G'.

b) Ta có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC})$$

$$= \overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}).$$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Theo câu a) ta có G là trọng tâm tam giác ABC.

25. $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{GC} = -\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - 2\vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

26. Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên :

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$$
$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$$

($\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, do G là trọng tâm tam giác ABC).

Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm trùng nhau là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

27. Để chứng minh hai tam giác PRT và QSU có cùng trọng tâm, theo bài tập 26, ta cần chứng minh : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \vec{0}$. Thật vậy, ta có :

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

28. a) Lấy một điểm O xác định nào đó, ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG}.$$

Bởi vậy, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Vậy điểm G được xác định duy nhất.

b) Gọi M, N là trung điểm hai cạnh đối nào đó (AB và CD chẳng hạn) và G là trọng tâm tứ giác $ABCD$, ta có : $\vec{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN})$, suy ra G là trung điểm của MN. Chứng minh tương tự ta có G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối AD và BC ; G cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo AC và BD.

c) Ta chọn một đỉnh nào đó của tứ giác $ABCD$, A chẳng hạn, và gọi G_A là trọng tâm tam giác BCD. Ta phải chứng minh rằng trọng tâm G của tứ giác nằm trên đoạn thẳng AG_A.

Thật vậy, vì G là trọng tâm của tứ giác $ABCD$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Lại vì G_A là trọng tâm tam giác BCD nên

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_A}.$$

Kết hợp với (*) ta suy ra $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_A} = \vec{0}$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GG_A}$ ngược hướng, do đó G nằm trên đoạn thẳng AG_A.