§5 ĐƯỜNG ELIP

I – MỤC TIÊU

– Học sinh hiểu và nắm vững định nghĩa elip, phương trình chính tắc của elip.

– Từ phương trình chính tắc của elip, HS xác định được các tiêu điểm, trục lớn, trục bé, tâm sai của elip đó và ngược lại, lập được phương trình chính tắc của elip khi biết các yếu tố xác định nó.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Elip được định nghĩa một cách thuần tuý hình học (SGK). Tuy nhiên, có thể nghiên cứu tính chất của elip bằng phương pháp đại số nếu ta viết được phương trình của elip trong một hệ trục toạ độ nào đó. Việc chọn hệ trục toạ độ như trong SGK là hợp lí, vì nó "bình đẳng" đối với hai tiêu điểm F_1 và F_2.

Có thể xem elip là ảnh của một đường tròn qua một phép biến đổi afin. SGK xét phép afin đặc biệt là phép co về một trục theo phương vuông góc với trục đó.

2. Ở các phần trước của chương này, ta đã nói về phương trình của đường thẳng, phương trình của đường tròn. Trong bài này và những bài sau, ta đề cập đến phương trình của elip, hypebol, parabol.

Nói rằng đường $(\mathscr{C})$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy có phương trình $F(x\,;\,y) = 0$ có nghĩa là :

a) Nếu điểm $M(x\,;\,y) \in (\mathscr{C})$ thì $F(x\,;\,y) = 0$;

b) Nếu điểm M có toạ độ $(x\,;\,y)$ thoả mãn phương trình $F(x\,;\,y) = 0$ thì $M \in (\mathscr{C})$.

Khi lập phương trình của elip, hypebol, parabol, ta chỉ chứng minh phần a), còn phần b) được thừa nhận (đối với parabol, phần b) cũng đã được trình bày, tuy không được đầy đủ).

3. Có thể nhận được phương trình chính tắc của elip từ định nghĩa bằng cách dùng phép biến đổi tương đương để rút gọn phương trình có căn thức :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Làm như vậy cũng khá dài dòng, vì phải đặt điều kiện khi thực hiện phép biến đổi tương đương,...

SGK đã trình bày một cách khác : Vì có nói đến khái niệm bán kính qua tiêu MF_1 và MF_2 (khi M thuộc elip) nên trước hết ta giải bài toán phụ : Nếu $M(x\,;\,y)$ thuộc elip thì giá trị MF_1 và MF_2 bằng bao nhiêu ?

Sau khi có kết quả $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a}$ thì ta có ngay

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a}.$$

Để ý đến vế phải : Vì $x \geq -a$, $0 < \dfrac{c}{a} < 1$ nên $\dfrac{cx}{a} \geq -c > -a$, suy ra $a + \dfrac{cx}{a} > 0$. Do đó có thể bình phương hai vế của đẳng thức trên để đưa nó về dạng rút gọn (chính tắc).

SGK đã không trình bày phần đảo : "Nếu toạ độ $(x\,;\,y)$ của M thoả mãn phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ thì $MF_1 + MF_2 = 2a$". Chứng minh điều đó như sau :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \qquad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \Leftrightarrow MF_1 = a + \frac{cx}{a} \left(\text{do } a + \frac{cx}{a} > 0\right).$$

Ta cũng có

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx.$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \Leftrightarrow MF_2 = a - \frac{cx}{a} \left(\text{do } a - \frac{cx}{a} > 0\right).$$

Vậy $MF_1 + MF_2 = 2a$.

4. Chú ý rằng chỉ có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$ mới gọi là *phương trình chính tắc* của elip. Phương trình này chỉ có được khi hai tiêu điểm nằm trên trục hoành và đối xứng với nhau qua trục tung. Ngoài ra, ta thường quy ước đặt tiêu điểm F_1 nằm bên trái trục tung. Như vậy phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a < b$ cố nhiên cũng là phương trình của elip (với tiêu điểm nằm trên Oy) nhưng không gọi là phương trình chính tắc của elip.

5. Cho học sinh thấy hình dạng của đường elip nếu đặt nó nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở. Đường elip thường gặp trong vẽ kĩ thuật cũng như trong hội hoạ.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Giới thiệu cách vẽ elip đồng thời dẫn đến định nghĩa. Có thể làm việc này trên lớp (thầy cô hoặc một học sinh thực hiện), có thể dùng máy tính hoặc đĩa hình nếu có điều kiện.

$\boxed{?1}$ Chu vi tam giác MF_1F_2 luôn bằng độ dài của sợi dây kín còn $MF_1 + MF_2$ cũng không đổi do khoảng cách F_1F_2 không đổi.

$\boxed{?2}$ Để ý đến $F_1F_2 = 2c$, $OF_1 = OF_2 = c$. Từ đó suy ra $F_1 = (-c\ ;0)$, $F_2 = (c\ ;0)$.

2

$$MF_1^2 - MF_2^2 = ((x+c)^2 + y^2) - ((x-c)^2 + y^2) = 4cx$$

$$\Rightarrow (MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx$$

$$\Rightarrow (MF_1 - MF_2).2a = 4cx \Leftrightarrow MF_1 - MF_2 = 2\frac{cx}{a}.$$

Từ đó ta được $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$; $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$.

$\boxed{?3}$ Cần yêu cầu HS giải thích đầy đủ một trong ba trường hợp. Cụ thể là : $M(x_0\,;\,y_0)$ thuộc elip (1) nên

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Thay toạ độ, chẳng hạn, của M_1 vào vế trái của (1), ta được

$$\frac{(-x_0)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} \Rightarrow \frac{(-x_0)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Suy ra M_1 nằm trên elip.

Tương tự đối với M_2, M_3.

Từ đó đi đến tính chất đối xứng của elip.

$\boxed{?4}$ Từ (1) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}\le 1\\ \dfrac{y^2}{b^2}\le 1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x^2\le a^2\\ y^2\le b^2\end{cases}, \text{ hay } \begin{cases}-a\le x\le a\\ -b\le y\le b.\end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của x bằng a, giá trị lớn nhất của y bằng b ; giá trị nhỏ nhất của x bằng $-a$, giá trị nhỏ nhất của y bằng $-b$.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

30. Các mệnh đề a), b), d) đúng. Các mệnh đề c), e) sai.

31. a) Toạ độ các tiêu điểm là $(\pm\sqrt{21}\,;\,0)$; Toạ độ các đỉnh là $(\pm 5\,;\,0)$ và $(0\,;\,\pm 2)$.

Độ dài trục lớn là $2a=10$, độ dài trục bé là $2b=4$.

b) $(\pm\sqrt{5}\,;\,0)$; $(\pm 3\,;\,0)$ và $(0\,;\,\pm 2)$; $2a=6$, $2b=4$.

c) $(\pm\sqrt{3}\,;\,0)$; $(\pm 2\,;\,0)$ và $(0\,;\,\pm 1)$; $2a=4$, $2b=2$.

32. a) Độ dài trục lớn $2a=8 \Rightarrow a=4$. Từ $e=\dfrac{c}{a}$ suy ra

$$c=ae=2\sqrt{3},\ b^2=a^2-c^2=16-12=4.$$

Phương trình chính tắc của (E) là :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

b) $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

c) Phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 3. \end{cases}$

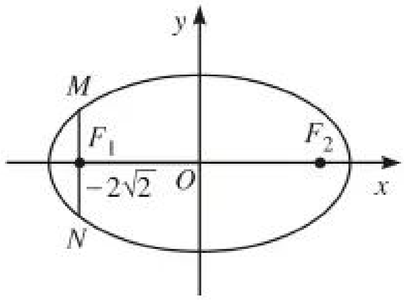
Giải hệ phương trình trên, ta được $a^2 = 4$, $b^2 = 1$.

Phương trình của (E) : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1.$

33. a) *Cách 1* (h. 37).

Đường thẳng Δ qua tiêu điểm F_1 và vuông góc với Ox có phương trình $x = -2\sqrt{2}$. Gọi M, N là giao điểm của Δ với elip, khi đó M và N có hoành độ bằng $-2\sqrt{2}$. Tung độ của M và N là $\pm\dfrac{1}{3}$. Vậy độ dài dây MN là

$$|y_M - y_N| = \frac{2}{3}.$$



Hình 37

Cách 2. Do tính đối xứng, ta có $MN = 2MF_1$. Dùng công thức tính bán kính qua tiêu MF_1 với $x_M = -2\sqrt{2}$, ta được $MF_1 = \dfrac{1}{3}$, suy ra $MN = \dfrac{2}{3}$.

b) Giả sử $M = (x\,;\,y)$. Từ công thức tính bán kính qua tiêu, ta có :

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow 3ex = a.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Thay giá trị đó của x vào phương trình elip, ta được

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn đầu bài là :

$$M_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} ; \frac{\sqrt{14}}{4}\right) \text{ và } M_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} ; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right).$$

34. Gọi tâm Trái Đất là F_2 và giả sử quỹ đạo chuyển động của vệ tinh có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó khoảng cách từ vệ tinh đến tâm Trái Đất là $d = a - \frac{c}{a}x$. Do $-a \le x \le a$ nên $a - c \le d \le a + c$. Gọi R là bán kính Trái Đất thì

$$\begin{cases} a - c = 583 + R \\ a + c = 1342 + R. \end{cases}$$

Từ đó tính được $2c = 759$; $2a = 1925 + 2R$.

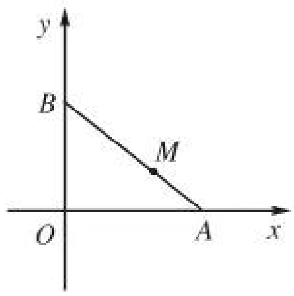
Tâm sai của quỹ đạo là

$$e = \frac{759}{1925 + 2R} = \frac{759}{1925 + 8000} \approx 0,07647.$$

35. Đặt $A = (x_1 ; 0)$ thuộc Ox và $B = (0 ; y_2)$ thuộc Oy (h. 38). Vì M thuộc đoạn AB và $MB = 2MA$ nên $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$, do đó nếu $M = (x ; y)$ thì

$$\begin{cases} 0 - x = -2(x_1 - x) \\ y_2 - y = -2(0 - y) \end{cases}$$

hay $x_1 = \frac{3}{2}x$, $y_2 = 3y$.



Hình 38

Theo giả thiết $AB = a$ không đổi nên $x_1^2 + y_2^2 = a^2$, suy ra

$$\frac{9x^2}{4} + 9y^2 = a^2$$

hay $$\frac{x^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}=1. \qquad (*)$$

Vậy tập hợp các điểm M là elip có phương trình chính tắc (*).

Lưu ý. Dựa vào kết quả bài toán này, người ta đã làm ra một dụng cụ để vẽ elip rất thuận tiện.