§5 TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

I – MỤC TIÊU

– Học sinh xác định được toạ độ của vectơ, toạ độ của điểm đối với trục toạ độ và hệ trục toạ độ.

– Học sinh hiểu và nhớ được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, điều kiện để hai vectơ cùng phương. Học sinh cũng cần hiểu và nhớ được điều kiện để ba điểm thẳng hàng, toạ độ của trung điểm đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác.

– Về kĩ năng, học sinh biết cách lựa chọn công thức thích hợp trong giải toán và tính toán chính xác.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Trước khi trình bày hệ trục toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian, việc đưa trục toạ độ trên đường thẳng là cần thiết ; điều đó giúp thấy rõ sự tương tự trong các không gian Ơ-clít một, hai và ba chiều. Cũng như trong mặt phẳng và trong không gian, khi ta chọn một điểm gốc O và vectơ đơn vị $\vec{i}$ trên đường thẳng thì đường thẳng đó trở thành một trục. Khi đó mỗi vectơ và mỗi điểm đều có toạ độ là một số.

2. Độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (trên một trục), kí hiệu là $\overline{AB}$, không phải là một khái niệm mới. Đó chính là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên một trục.

Cần lưu ý rằng :

– Toạ độ của một vectơ trên trục không phụ thuộc vào việc chọn gốc O của trục mà chỉ phụ thuộc vào việc lựa chọn vectơ đơn vị $\vec{i}$ (có hai cách chọn). Khi đổi vectơ đơn vị $\vec{i}$ thành $-\vec{i}$ thì toạ độ mỗi vectơ đều đổi dấu.

– Toạ độ một điểm phụ thuộc vào vị trí gốc O và cách chọn vectơ đơn vị.

– Độ dài đại số $\overline{AB}$ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ cố nhiên phụ thuộc vào vectơ đơn vị $\vec{i}$. Tuy nhiên, nếu có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trên một trục thì tích số $\overline{AB}.\overline{CD}$ và tỉ số $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ $(\overline{CD} \neq 0)$ không phụ thuộc vào điểm O, cũng như vectơ đơn vị $\vec{i}$.

Bởi vậy trên đường thẳng bất kì, ta có thể nói về tích số (hay tỉ số) các độ dài đại số của hai vectơ mà không cần phải chỉ rõ cách chọn trục như thế nào.

3. Học sinh đã biết đến hệ trục toạ độ ở chương trình đại số lớp 7. Ở đó, các em đã biết về trục số, biết vẽ hệ trục toạ độ và xác định toạ độ của một điểm. Các khái niệm này được xây dựng trên cơ sở độ dài đoạn thẳng.

Trong SGK Hình học 10 nâng cao, dựa vào cách biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương, ta có thể định nghĩa một cách đơn giản khái niệm toạ độ của vectơ và của điểm đối với một hệ trục toạ độ.

4. Cần lưu ý cho học sinh về thứ tự của cặp số $(x\,;\,y)$ trong toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm. Trong sách giáo khoa không nhấn mạnh điểm này, mà chỉ nói "số thứ nhất x gọi là hoành độ...". Ngoài ra, giáo viên cần nhấn mạnh việc sử dụng dấu ";" để phân cách giữa hoành độ và tung độ (của vectơ hay của điểm).

5. Trong quá trình giảng dạy, giáo viên nên cho học sinh quan sát hình để xác định toạ độ của vectơ, toạ độ của điểm và ngược lại. Giáo viên nên chuẩn bị trước một số hình vẽ khác với các hình trong SGK để học sinh quan sát, luyện tập.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b\vec{i} - a\vec{i} = (b-a)\vec{i}$. Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ bằng $b - a$.

Tương tự, toạ độ của $\overrightarrow{BA}$ bằng $a - b$.

Toạ độ trung điểm của đoạn AB bằng $\dfrac{a+b}{2}$. (Do I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$).

2 Nhằm hướng dẫn học sinh tìm các hệ số x, y của vectơ $\vec{a}$ khi viết dưới dạng $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, từ đó đi đến định nghĩa toạ độ của vectơ. Giáo viên có thể đưa ra những ví dụ khác, nhất là cho hai trường hợp : $\vec{a} = x\vec{i}$ và $\vec{a} = y\vec{j}$.

Đáp số : $\vec{a} = 2\vec{i} + 2{,}5\vec{j}$; $\vec{b} = -3\vec{i} + 0\vec{j}$;

$\vec{u} = 2\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$; $\vec{v} = 0\vec{i} + 2{,}5\vec{j}$.

$\boxed{?1}$ a) $\vec{a} = (2\ ;\ 2{,}5)$, $\vec{b} = (-3\ ;\ 0)$, $\vec{u} = (2\ ;\ -1{,}5)$, $\vec{v} = (0\ ;\ 2{,}5)$.

b) $\vec{0} = (0\ ;\ 0)$, $\vec{i} = (1\ ;\ 0)$, $\vec{j} = (0\ ;\ 1)$,

$\vec{i} + \vec{j} = (1\ ;\ 1)$, $2\vec{j} - \vec{i} = (-1\ ;\ 2)$, $\frac{1}{3}\vec{i} - 3\vec{j} = \left(\frac{1}{3}\ ;\ -3\right)$,

$\sqrt{3}\vec{i} + 0{,}14\vec{j} = (\sqrt{3}\ ;\ 0{,}14)$.

3

a) Theo định nghĩa thì $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$.

b) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-3\vec{i} + 2\vec{j}) + (4\vec{i} + 5\vec{j}) = \vec{i} + 7\vec{j} \Rightarrow \vec{c} = (1\ ;\ 7)$;

$\vec{d} = 4\vec{a} = 4(-3\vec{i} + 2\vec{j}) = -12\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow \vec{d} = (-12\ ;\ 8)$;

$\vec{u} = 4\vec{a} - \vec{b} = (-12\vec{i} + 8\vec{j}) - (4\vec{i} + 5\vec{j}) = -16\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (-16\ ;\ 3)$.

$\boxed{?2}$ a) Do $\frac{0}{-1} \neq \frac{5}{7}$ nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương ;

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ đều cùng phương với $\vec{i}$ nên $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương ;

c) Vì $\frac{4}{-0{,}5} = \frac{-8}{1}$ nên $\vec{e}$, $\vec{f}$ cùng phương ;

d) Vì $\frac{\sqrt{2}}{3} \neq \frac{3}{\sqrt{2}}$ nên $\vec{m}$, $\vec{n}$ không cùng phương.

GV nên lưu ý học sinh điều kiện để một vectơ cùng phương với vectơ có một trong hai toạ độ bằng 0.

4

a) $O(0\ ;\ 0)$, $A(-4\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 3)$, $C(3\ ;\ 1)$, $D(4\ ;\ -4)$.

b) E trùng với D.

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4\ ;\ 3)$.

$\boxed{?3}$ Viết $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ rồi dùng định nghĩa toạ độ của điểm và biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ (như hoạt động 3) để chứng minh.

5

a) Do P là trung điểm của đoạn MN nên $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$.

b) Ta có $\overrightarrow{OM} = (x_M\ ;\ y_M)$, $\overrightarrow{ON} = (x_N\ ;\ y_N)$, suy ra

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{x_M + x_N}{2}\ ;\ \frac{y_M + y_N}{2}\right).$$

Đó cũng là toạ độ của P.

6

Ta có : $\begin{cases} x_{M'} + x_M = 2x_A \\ y_{M'} + y_M = 2y_A \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M = -5 \\ y_{M'} = 2y_A - y_M = 5. \end{cases}$

7

a) G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

b) Từ câu a) suy ra :

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Đó cũng là toạ độ của điểm G.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

29. Các mệnh đề đúng là : b), c), e)

Các mệnh đề sai là : a), d).

30. $\vec{a} = (-1\ ;\ 0)$, $\vec{b} = (0\ ;\ 5)$, $\vec{c} = (3\ ;\ -4)$, $\vec{d} = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e} = (0{,}15\ ;\ 1{,}3)$,

$\vec{f} = (\pi\ ;\ -\cos 24^{\circ})$.

31. a) $\vec{u} = (2\ ;\ -8)$.

b) $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Suy ra $\vec{x} = (-6\ ;\ 1)$.

c) Tìm toạ độ của vectơ $k\vec{a} + l\vec{b}$ rồi so sánh với toạ độ của $\vec{c}$ để được hệ phương trình $\begin{cases} 2k + 3l = 7 \\ k + 4l = 2. \end{cases}$

Giải hệ ta được $k = 4{,}4\ ;\ l = -0{,}6$.

32. Ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\ ;\ -5\right)$, $\vec{v} = (k\ ;\ -4)$.

$\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ khi và chỉ khi $2k = \frac{4}{5}$, suy ra $k = \frac{2}{5}$.

33. Các mệnh đề đúng là : a), c), e).

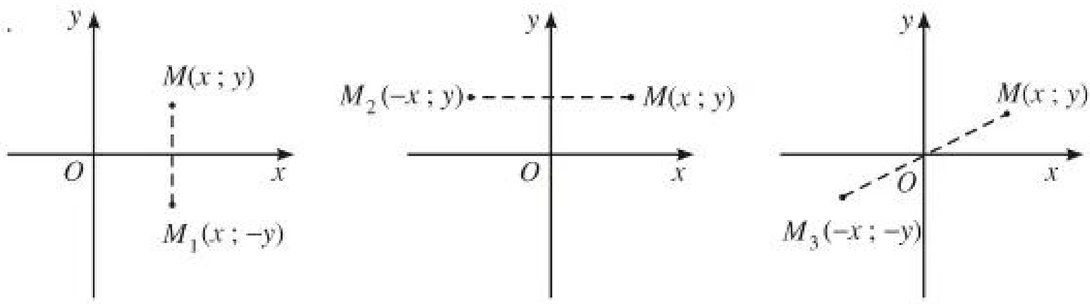
Các mệnh đề sai là : b), d).

34. a) $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (12; -9)$. Suy ra $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Giả sử $D = (x\ ;\ y)$. Điểm A là trung điểm của BD khi và chỉ khi $-3 = \frac{1+x}{2}$ và $4 = \frac{1+y}{2}$. Vậy $D = (-7\ ;\ 7)$.

c) Vì E nằm trên Ox nên $E = (x\ ;\ 0)$. Khi đó $\overrightarrow{AE} = (x + 3\ ;\ -4)$. Ba điểm A, B, E thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AE}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ -3)$, hay $\frac{x+3}{4} = \frac{-4}{-3}$, suy ra $x = \frac{7}{3}$. Vậy $E = \left(\frac{7}{3}\ ;\ 0\right)$.

35. (h. 7) Có thể dùng hình vẽ để xác định toạ độ của M_1, M_2, M_3 trong các câu a), b), c).



Hình 7

Đáp số : $M_1(x\ ;\ -y)$, $M_2(-x\ ;\ y)$, $M_3(-x\ ;\ -y)$.

36. a) Ta có :

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{-4+2+2}{3}; \dfrac{1+4-2}{3}\right)$ hay $G(0\ ;\ 1)$.

b) Giả sử $D = (x\ ;\ y)$. Điểm C là trọng tâm tam giác ABD khi và chỉ khi $2 = \dfrac{-4+2+x}{3}$ và $-2 = \dfrac{1+4+y}{3}$. Suy ra $D = (8\ ;\ -11)$.

c) Giả sử $E = (x\ ;\ y)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (6\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{CE} = (x-2\ ;\ y+2)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$ hay $6 + x - 2 = 0$ và $3 + y + 2 = 0$. Vậy $E = (-4\ ;\ -5)$.