§6 ĐƯỜNG HYPEBOL

I – MỤC TIÊU

Học sinh cần :

– Nhớ được định nghĩa đường hypebol và các yếu tố xác định đường đó như : tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai,...

– Viết được phương trình chính tắc của hypebol khi biết các yếu tố xác định hypebol.

– Từ phương trình chính tắc của hypebol, thấy được tính chất và chỉ ra được các tiêu điểm, đỉnh, hai đường tiệm cận của hypebol.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Cũng giống như elip, chúng ta định nghĩa hypebol một cách thuần tuý hình học và tìm cho nó một phương trình đơn giản bằng cách chọn một hệ toạ độ thích hợp.

Việc lập phương trình chính tắc của hypebol cũng làm tương tự như đối với elip. Trước hết ta tính bán kính qua tiêu của mỗi điểm M thuộc hypebol và sau đó dễ dàng đưa về phương trình chính tắc.

Cũng lưu ý rằng chỉ có phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mới gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

Phương trình $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ cũng là phương trình của một hypebol (tiêu điểm nằm trên Oy), nhưng ta không gọi nó là phương trình chính tắc.

2. Do ở lớp 10, học sinh chưa có khái niệm giới hạn nên không thể đưa ra một cách chính xác định nghĩa hai đường tiệm cận của hypebol. Hai đường thẳng này gắn liền với hình chữ nhật cơ sở, chúng tôi đã cân nhắc và trình bày trong SGK khái niệm hình chữ nhật cơ sở rồi mới nói về hai đường tiệm cận và giải thích tên gọi "tiệm cận" qua hoạt động 3. Các thầy cô chỉ nên yêu cầu các em nhớ công thức hai đường tiệm cận, còn hình chữ nhật cơ sở liên hệ với các yếu tố khác của hypebol thì giáo viên có thể giới thiệu cho học sinh thấy qua hình vẽ trong SGK.

Chú ý rằng hai đường tiệm cận của hypebol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có thể viết chung dưới dạng một phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

Thật vậy, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{b}{a}x \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{array}\right.$.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

$$MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2,\ MF_2^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$$

$$\Rightarrow |MF_1 - MF_2|.|MF_1 + MF_2| = |4cx| \Rightarrow MF_1 + MF_2 = \left|\dfrac{2cx}{a}\right|.$$

Khi $x > 0$ ta có $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = \dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 - MF_2 = 2a, \end{cases}$

khi $x < 0$ ta có $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = -\dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 - MF_2 = -2a. \end{cases}$

Từ đó suy ra $MF_1 = \left|a + \dfrac{cx}{a}\right|$; $MF_2 = \left|a - \dfrac{cx}{a}\right|$.

2

Giáo viên nhắc lại $\boxed{?3}$ trong §5 (phần elip) để HS có thể làm tương tự.

3

Viết lại phương trình hai đường

hypebol (H) : $x^2 - 4y^2 = 4$;

đường tiệm cận : $x - 2y = 0$.

Khoảng cách từ điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ đến đường tiệm cận là

$$d = \frac{|x_0 - 2y_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_0^2 - 4y_0^2|}{\sqrt{5}(x_0 + 2y_0)} = \frac{4}{\sqrt{5}(x_0 + 2y_0)}.$$

Khi $x_0 > 0$ tăng lên thì $y_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{x_0^2 - 4}$ cũng tăng lên, do đó khoảng cách d càng giảm dần.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

36. Các mệnh đề a), b), d) đúng, mệnh đề c) sai.

37. a) Hypebol có : $a = 3$; $b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{13}\,;\,0)$, $F_2(\sqrt{13}\,;\,0)$.

Độ dài trục thực : $2a = 6$.

Độ dài trục ảo : $2b = 4$.

Phương trình các đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{2}{3}x$.

b) Hypebol có : $a = 3$; $b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Tiêu điểm : $F_1(-5\,;\,0)$, $F_2(5\,;\,0)$, các đỉnh $(-3\,;\,0)$, $(3\,;\,0)$.

Độ dài trục thực : $2a = 6$.

Độ dài trục ảo : $2b = 8$.

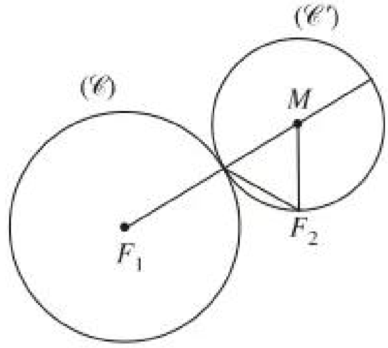
Phương trình các đường tiệm cận : $y = \pm\frac{4}{3}x$.

c) Đưa phương trình hypebol về dạng

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 9,\ b^2 = 1,\ c^2 = 10.$$

Hai tiêu điểm là $(-\sqrt{10}\ ;\ 0)$ và $(\sqrt{10}\ ;\ 0)$. Độ dài trục thực bằng 6, độ dài trục ảo bằng 2. Phương trình các đường tiệm cận : $y = \pm\frac{1}{3}x$.

38. (h. 39) Gọi M là tâm đường tròn $(\mathscr{C}')$ đi qua F_2, tiếp xúc với $(\mathscr{C})$. Ta có :



Hình 39

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi

$$MF_1 = R + MF_2\ ;$$

Hai đường tròn tiếp xúc trong khi và chỉ khi

$$MF_1 = MF_2 - R.$$

Như vậy, $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với $(\mathscr{C}')$ khi và chỉ khi

$$MF_1 - MF_2 = \pm R \text{ hay } |MF_1 - MF_2| = R.$$

Do đó, tập hợp các tâm M của $(\mathscr{C}')$ là một hypebol có hai tiêu điểm là F_1, F_2 ; độ dài trục thực bằng $\frac{R}{2}$.

Phương trình chính tắc của hypebol đó là

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{F_1F_2^2 - R^2}}{2}\right)^2} = 1.$$

39. a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$

b) Hypebol có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có $2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 = 3.$

Từ giả thiết ta có $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow b = \dfrac{2a}{3}.$

Từ đó $a^2 + \dfrac{4a^2}{9} = 3 \Rightarrow a^2 = \dfrac{27}{13},\ b^2 = \dfrac{12}{13}.$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\dfrac{x^2}{\frac{27}{13}} - \dfrac{y^2}{\frac{12}{13}} = 1.$

c) Từ giả thiết ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} c = \sqrt{5}a \\ \dfrac{10}{a^2} - \dfrac{36}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5a^2 \\ \dfrac{10}{a^2} - \dfrac{36}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình của hypebol là $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

40. Xét hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ Hai đường tiệm cận của (H) là :

$$\Delta_1 : \ y = \frac{b}{a}x \ \text{ hay } \ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

$$\Delta_2 : \ y = -\frac{b}{a}x \ \text{ hay } \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

$M(x_0\,;\,y_0) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1.$

Ta có :

$$d(M\,;\Delta_1).d(M\,;\Delta_2)=\frac{\left|\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\cdot\frac{\left|\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

không đổi.

41. $MF_1^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Tương tự

$$MF_2^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2.$$

Từ đó suy ra :

Nếu $x>0$ thì

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\ ;\ MF_1-MF_2=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}.$$

Nếu $x<0$ thì

$$x+\frac{1}{x}\leq -2\ ;\ MF_1-MF_2=-\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}.$$

Vậy $\left|MF_1-MF_2\right|=2\sqrt{2}.$