LỜI GIẢI BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. a) Biến đổi vế phải :

$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$$= \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}. \qquad (*)$$

Ta có $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} = 0$ (do $AA' \perp AB$ và $BB' \perp BC$).

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = BB_1.BC.\cos(B + 90^o)$;

$\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = -BB'.BA.\cos(B + 90^o)$;

Mà $BB_1 = BA$, $BC = BB'$ nên vế phải của (*) bằng 0.

b) $(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AC}$.

Mà $(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{AC} = 0$ (theo câu a),

$\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AC} = 0$ (do $CC' \perp AC$),

nên vế trái cũng bằng 0.

c) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$, theo câu b) ta có $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Chứng minh tương tự ta được $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$. Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương, hay A, B, C thẳng hàng, trái với giả thiết A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

Vậy $\vec{u} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

d) Phân tích mỗi vectơ $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ thành tổng hai vectơ theo quy tắc hình bình hành :

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CA})$$

$$= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

2. a) Từ giả thiết suy ra

$$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Tương tự, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$

b) $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right).\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 = 0 \quad (\text{do } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0).$$

Từ đó đi đến : $AM \perp CN \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 = 0$ hay $3b^2 = 2c^2$.

3. a) Áp dụng công thức

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 16 - 36}{2.5.4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \widehat{A} \approx 83^{\circ}.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36 + 16 - 25}{2.6.4} = \frac{27}{48} \Rightarrow \widehat{B} \approx 56^{\circ}.$$

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 41^{\circ}.$$

b) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{25 + 16}{2} - \frac{36}{4} = \frac{23}{2} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}.$

Tương tự ta có $m_b = \frac{\sqrt{79}}{2}$ và $m_c = \frac{\sqrt{106}}{2}.$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2} - 6\right)\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 4\right)} = \frac{15}{4}\sqrt{7}.$$

c) $S = p.r$ hay $\frac{15}{4}\sqrt{7} = \frac{15r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6.5.4}{15\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}.$$

4. a) Từ giả thiết suy ra

$$a^2(b+c) - a^3 = b^3 + c^3 - a^3 \Rightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2.$$

Theo định lí côsin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$, suy ra

$$-2bc.\cos A = -bc,$$

hay $\cos A = \frac{1}{2}$, do đó $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Vậy tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$.

b) Từ $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$ suy ra

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S},\ \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S},\ \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Từ giả thiết ta có

$$\frac{2a}{2S} = \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \Rightarrow 2a = b + c$$

$$\Rightarrow 2.2R\sin A = 2R\sin B + 2R\sin C$$

$$\Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C.$$

5. a) Phương trình của các đường thẳng :

$$AB' : \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1 \text{ hay } b'x + ay - ab' = 0,$$

$$A'B : \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1 \text{ hay } bx + a'y - a'b = 0.$$

b) AB' và $A'B$ cắt nhau khi $\frac{b'}{b} \neq \frac{a}{a'}$ hay $a'b' - ab \neq 0$.

Khi đó toạ độ của giao điểm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} b'x + ay = ab' \\ bx + a'y = a'b. \end{cases}$$

Giải hệ, ta tìm được $I = \left(\frac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab} ; \frac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab} \right)$.

c) Toạ độ của các vectơ

$$\overrightarrow{CC'} = (a' - a\ ;\ b' - b),$$

$$\overrightarrow{CI} = \left(\frac{ab(a - a')}{a'b' - ab}\ ;\ \frac{ab(b - b')}{a'b' - ab}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{CI} = -\dfrac{ab}{a'b' - ab}\overrightarrow{CC'}$, suy ra $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{CC'}$ cùng phương, hay ba điểm C, I, C' thẳng hàng.

d) C là trung điểm của $IC' \Leftrightarrow \dfrac{-ab}{a'b' - ab} = -1$

$$\Leftrightarrow ab = a'b' - ab \Leftrightarrow a'b' = 2ab.$$

6. a) Độ dài các cạnh của tam giác OAB là :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (0-4)^2} = 5\ ;$$

$$OA = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5\ ;$$

$$OB = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} = 6.$$

Tam giác OAB là tam giác cân tại đỉnh A.

Gọi H là trung điểm của OB thì

$$H = (3\ ;\ 0),\ AH = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4$$

và $$S_{ABO} = \frac{1}{2}OB.AH = 12.$$

b) Hiển nhiên đường trung trực của đoạn OB có phương trình $x = 3$.

Đường trung trực của OA có phương trình :

$$x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0.$$

Giải hệ $\begin{cases} x = 3 \\ 6x + 8y - 25 = 0 \end{cases}$ để tìm toạ độ giao điểm J của hai đường trung trực, (đó chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB), ta được $J = \left(3\ ;\ \dfrac{7}{8}\right)$.

Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là : $R = OJ = \dfrac{25}{8}$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là :

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{625}{64}.$$

c) Phương trình các đường thẳng $OA : 4x - 3y = 0$, $OB : y = 0$.

Hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó có phương trình :

$$\frac{4x-3y}{5}=y \text{ và } \frac{4x-3y}{5}=-y$$

hay $$x - 2y = 0 \qquad (*)$$

và $$2x + y = 0. \qquad (**)$$

Thay toạ độ của A, B vào vế trái của (*) ta được $3 - 8 < 0$; $6 - 0 > 0$.

Suy ra A, B ở về hai phía của đường thẳng (*).

Vậy phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB có phương trình :

$$x - 2y = 0.$$

d) Do tam giác OAB cân tại đỉnh A nên đường cao AH cũng là phân giác trong tại đỉnh A. Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của hai đường phân giác trong có phương trình $x = 3$ và $x - 2y = 0$, nó có toạ độ $\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$.

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = d(I\,;OB) = \frac{3}{2}$.

Phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là :

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

7. a) $M_1M_2 : \left(\frac{16}{m}-m\right)(x+4)-8(y-m)=0.$

b) $$d(O\,;M_1M_2)=\frac{\left|4\left(\frac{16}{m}-m\right)+8m\right|}{\sqrt{\left(\frac{16}{m}-m\right)^2+64}}=\frac{4\left|\frac{16}{m}+m\right|}{\sqrt{\left(\frac{16}{m}+m\right)^2}}=4.$$

c) Do $d(O\ ;\ M_1M_2) = 4$ nên đường thẳng M_1M_2 luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = 4$. Đó là một đường tròn cố định.

d) Phương trình các đường thẳng

$$A_1M_2 : 2x - my + 8 = 0,$$

$$A_2M_1 : mx + 8y - 4m = 0.$$

Từ đó tìm được toạ độ giao điểm I của chúng là :

$$x_I = \frac{4(m^2 - 16)}{m^2 + 16}\ ;\ y_I = \frac{16m}{m^2 + 16}.$$

e) Ta có

$$\left(\frac{x_I}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_I}{2}\right)^2 = \frac{\left(m^2 - 16\right)^2 + 64m^2}{(m^2 + 16)^2} = \frac{(m^2 + 16)^2}{(m^2 + 16)^2} = 1.$$

Vậy I nằm trên elip có phương trình : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Elip đó có hai tiêu điểm :

$$F_1(-2\sqrt{3}\ ;\ 0) \text{ và } F_2(2\sqrt{3}\ ;\ 0).$$

8. a) Hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ có hai đường tiệm cận là

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0 \text{ và } \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 0$$

hay $$y = \frac{x}{2} \text{ và } y = -\frac{x}{2}.$$

b) Hình chữ nhật cơ sở của hypebol có hai kích thước $2a = 8$, $2b = 4$. Diện tích hình chữ nhật đó bằng $2a.2b = 32$.

c) Ta có

$$\frac{5^2}{16} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

và $$\frac{8^2}{16}-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}=4-3=1.$$

Do đó M, N đều thuộc hypebol.

d) Phương trình của Δ là

$$(4\sqrt{3}-3)x-6y-20\sqrt{3}+24=0.$$

Thay $y=\frac{x}{2}$ vào phương trình của Δ để tìm hoành độ giao điểm P, ta được $x_P=8+2\sqrt{3}$, do đó $y_P=4+\sqrt{3}$.

Lại thay $y=-\frac{x}{2}$ vào phương trình của Δ để tìm toạ độ giao điểm Q, ta được $x_Q=5-2\sqrt{3}$, do đó $y_Q=-\frac{5}{2}+\sqrt{3}$.

Vậy $P=(8+2\sqrt{3}\ ;\ 4+\sqrt{3})$, $Q=\left(5-2\sqrt{3}\ ;\ -\frac{5}{2}+\sqrt{3}\right)$.

e) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của MN và PQ, ta có :

$$x_I=\frac{5+8}{2}=\frac{13}{2},\quad x_J=\frac{(8+2\sqrt{3})+(5-2\sqrt{3})}{2}=\frac{13}{2}.$$

Vậy $x_I=x_J$. Do I, J cùng thuộc đường thẳng MN nên từ $x_I=x_J$ suy ra $I\equiv J$.

9. a) Parabol (P) : $y^2=4x$ có tham số tiêu $p=2$, suy ra tiêu điểm của (P) là $F(1\ ;\ 0)$ và phương trình đường chuẩn d của (P) là $x+1=0$.

b) Dễ dàng tìm được $K=(-1\ ;\ m)$, $H=(0\ ;\ m)$, $M=\left(\frac{m^2}{4};m\right)$.

c) Ta có $I=\left(0\ ;\ \frac{m}{2}\right)$. Phương trình đường thẳng IM là :

$$4x-2my+m^2=0.$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases}4x-2my+m^2=0\\ y^2=4x\end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m^2}{4} \\ y = m. \end{cases}$

Vậy đường thẳng IM chỉ có chung với parabol (P) điểm M.

d) Đường thẳng IM có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; -2m)$.

Ta lại có $\overrightarrow{KF} = (2 ; -m)$, do đó $\overrightarrow{KF} = \dfrac{1}{2}\vec{n}$, suy ra $\overrightarrow{KF}$ cùng phương với $\vec{n}$.

Vậy $KF \perp IM$.

Do $M \in (P)$ nên $MF = MK$ (MK bằng khoảng cách từ M đến đường chuẩn d). Trong tam giác cân MKF, đường thẳng MI vuông góc với KF nên MI là phân giác của góc KMF.