ÔN TẬP CHƯƠNG II

I – MỤC TIÊU

1. Học sinh nhớ lại được những kiến thức cơ bản nhất đã học trong chương : Giá trị lượng giác của các góc từ 0^o đến 180^o, định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ, định lí côsin, định lí sin trong tam giác, công thức độ dài trung tuyến và các công thức tính diện tích tam giác.

2. Học sinh vận dụng được các định lí côsin, định lí sin trong tam giác, công thức độ dài trung tuyến và diện tích tam giác vào các bài toán chứng minh, tính toán hình học và giải quyết một số bài toán thực tế.

3. Về kĩ năng, ở những nơi có điều kiện, học sinh bước đầu biết sử dụng MTBT để tính toán.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Yêu cầu học sinh làm việc trước ở nhà : Tự mình trả lời các câu hỏi tự kiểm tra và chuẩn bị các bài tập.

2. Trên lớp, thầy giáo thông qua một vài bài tập để ôn luyện cho học sinh, không đi sâu vào việc tính toán quá cụ thể.

3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45'.

III – GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. Ta có

a) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right).$$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right).$$

2. a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\,\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2).$$

Vậy :

• Nếu $k^2 > GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính

$$\sqrt{\frac{k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2}{3}}.$$

• Nếu $k^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm G.

• Nếu $k^2 < GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

3. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = k^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}\left(k^2 - 2OA^2 - 2OB^2\right).$$

Ta có kết luận tương tự như hai bài tập trên.

4. a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right).\left(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}\right)$ (vì các góc BAC và $B'AC'$ là những góc vuông)

$= \frac{1}{2}\left(AB.AC'.\cos\widehat{BAC'} - AB'.AC.\cos\widehat{B'AC}\right) = 0$ (vì $AB = AC$, $AB' = AC'$ và $\widehat{BAC'} = \widehat{B'AC}$).

Vậy $AI \perp CC'$. Chứng minh tương tự ta có $AJ \perp BB'$.

b) $\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{B'C} = \left(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'}\right)$

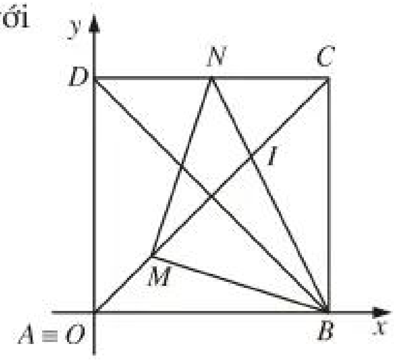
$$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$$

$$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$$

$= AC'.AC.\cos\widehat{CAC'} + AB.AB'.\cos\widehat{BAB'}$

$= 0$ (vì hai góc BAB' và CAC' bù nhau).

5. Lập hệ trục toạ độ vuông góc với gốc trùng với điểm A sao cho $B = (a\,;\,0)$, $D = (0\,;\,a)$ (h. 29).



Hình 29

a) Ta có $M = \left(\dfrac{a}{4}\,;\,\dfrac{a}{4}\right)$, $N = \left(\dfrac{a}{2}\,;\,a\right)$,

$$BM = \sqrt{\left(\frac{a}{4} - a\right)^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4},$$

$$BN = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

b) Từ kết quả của câu a) suy ra tam giác BMN vuông cân tại M.

$$S_{BMN} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4}.\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{5a^2}{16}.$$

c) Hai tam giác ICN và IAB đồng dạng nên $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{NC}{BA} = \dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra

$$IC = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

d) Trong tam giác BDN ta có

$$R = \frac{BN}{2\sin\widehat{BDN}} = \frac{a\sqrt{5}}{2.2.\sin 45^{\circ}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

6. a) $\cos(\vec{e},\vec{f}) = \dfrac{4.1 + 1.4}{\sqrt{16+1}.\sqrt{1+16}} = \dfrac{8}{17} \Rightarrow (\vec{e},\vec{f}) \approx 61^{\circ}56'$.

b) $\vec{a} = (4 + m\,;\,1 + 4m)$. Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi

$$\vec{a}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

c) $\vec{b} = (4n + 1 ; n + 4)$, $\vec{i} + \vec{j} = (1 ; 1)$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{b}$ và $\vec{i} + \vec{j}$, ta có

$$\cos\varphi = \frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}} = \frac{5(n+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17n^2+16n+17}}.$$

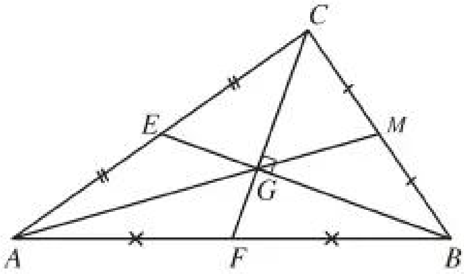
$\varphi = 45^{\circ}$ khi và chỉ khi

$$5(n+1) = \sqrt{17n^2+16n+17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \geq -1 \\ 25n^2+50n+25 = 17n^2+16n+17 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \geq -1 \\ 4n^2+17n+4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = -\frac{1}{4}.$$

7. (h. 30) Hai trung tuyến BE, CF vuông góc với nhau tại trọng tâm G khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G, hay $GM = \frac{1}{2}BC$. Từ đó

$$\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$



Hình 30

tức là $\frac{1}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$ hay $b^2 + c^2 = 5a^2$.

8. Gọi hai cạnh tam giác là $BC = a$, $AC = b$, khi đó $S = \frac{1}{2}ab.\sin C$.

Do a, b không đổi nên diện tích S lớn nhất khi và chỉ khi $\sin C = 1$ hay $\widehat{C} = 90^{\circ}$.

9. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24.12.8.4} = 96.$

$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{192}{12} = 16.$

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{12.16.20}{4.96} = 10.$

$r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4.$

10. a) $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \dfrac{a}{2R} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} R = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

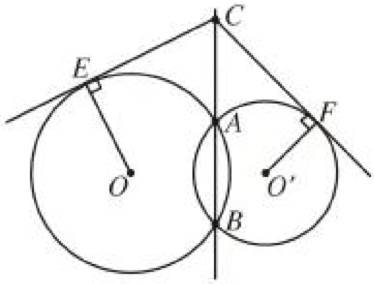
$$= \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4S}.$$

11. (h. 31)

$\mathscr{P}_{C/(O)} = CE^2 = CA.CB$,

$\mathscr{P}_{C/(O')} = CF^2 = CA.CB$,

suy ra $CE = CF$.



Hình 31

12. a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD (h. 32).

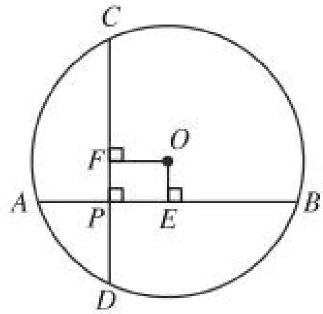
Ta có $AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + (2CF)^2$

$= 4(AO^2 - OE^2 + CO^2 - OF^2)$

$= 4(2R^2 - (OE^2 + OF^2))$

$= 4(2R^2 - OP^2)$

$= 8R^2 - 4OP^2$ không đổi.



Hình 32

b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$

$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$

$= AB^2 + CD^2 + 4\mathscr{P}_{P/(O)}$

$= 8R^2 - 4PO^2 + 4(PO^2 - R^2)$

$= 4R^2$, không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

Đáp án bài tập trắc nghiệm

1. (B)	**2.** (C)	**3.** (A)	**4.** (D)
5. (A)	**6.** (B)	**7.** (B)	**8.** (D)
9. (C)	**10.** (B)	**11.** (A)	**12.** (C)
13. (B)	**14.** (A)	**15.** (C)	**16.** (C)