ÔN TẬP CHƯƠNG III

I – MỤC TIÊU

1. Học sinh cần nắm vững cách viết phương trình của đường thẳng, đường tròn, ba đường cônic khi biết các yếu tố xác định chúng.
2. Học sinh nhớ được một số công thức về khoảng cách, góc và có các kĩ năng về tìm giao điểm của các đường,...

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Có hai tiết trên lớp dành cho phần ôn tập chương. Cần hướng dẫn học sinh chuẩn bị kĩ ở nhà : trả lời các "câu hỏi tự kiểm tra", làm các bài tập ôn.
2. Trên lớp, thầy giáo đưa ra một số bài tập có nhiều câu hỏi liên quan đến các kiến thức trong chương, rồi cùng học sinh nêu phương hướng giải quyết vấn đề. Thông qua các hoạt động trên lớp như thế, ta có thể ôn và luyện cho học sinh.
3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45'.

III – GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. a) Δ_1, Δ_2 cắt nhau, ($\Delta_1 \perp \Delta_2$).

b) $\Delta_1 // \Delta_2$.

c) $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

2. a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}(4\ ;\ 3)$. Ta tìm một điểm của đường thẳng, chẳng hạn $(-2\ ;\ -1)$. Khi đó phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t. \end{cases}$$

b) $\dfrac{x}{-\dfrac{2}{3}} + \dfrac{y}{\dfrac{1}{2}} = 1.$

c) $d(M\ ;\ \Delta) = 1{,}8\ ;\ d(N\ ;\ \Delta) = 2\ ;\ d(P\ ;\ \Delta) = 0{,}8.$

Δ cắt hai cạnh MP và NP, Δ không cắt cạnh MN.

d) Gọi α và β lần lượt là góc giữa Δ với Ox và Oy.

Ta có : $\cos\alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 52'\ ;$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'.$$

3. a) Dễ thấy $O \notin d$. Điểm $M(x\ ;\ y)$ thuộc nửa mặt phẳng bờ d, chứa O khi và chỉ khi

$$(0 - 0 + 2)(x - y + 2) > 0 \text{ hay } x - y + 2 > 0.$$

Thay toạ độ điểm A vào vế trái phương trình của d, ta được

$$d_A = 2 - 0 + 2 = 4 > 0.$$

Vậy A nằm trong nửa mặt phẳng bờ d và chứa O.

b) Điểm $O'(x'\ ;\ y')$ đối xứng với O qua $d \Leftrightarrow \begin{cases} OO' \perp d & (1) \\ d_{O'} = -d_O & (2) \end{cases}$

(d_O và $d_{O'}$ là các giá trị có được khi thay toạ độ của O và O' vào vế trái của phương trình tổng quát của đường thẳng d).

$(1) \Leftrightarrow x' + y' = 0.$

$(2) \Leftrightarrow x' - y' + 2 = -2$ hay $x' - y' = -4.$

Vậy $x' = -2$, $y' = 2$. Do đó $O' = (-2 ; 2)$.

c) Vì $OA = 2$ không đổi nên chu vi tam giác OMA nhỏ nhất khi $MO + MA$ nhỏ nhất. Với mọi M trên d ta luôn có $MO = MO'$ nên

$$MO + MA = MO' + MA \geq O'A.$$

Dấu bằng xảy ra khi M nằm giữa O' và A hay M là giao điểm của d và đường thẳng $O'A$. Viết phương trình đường thẳng $O'A$ rồi giải hệ phương trình để tìm toạ độ của M.

ĐS : $M = \left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right).$

4. Δ' đối xứng với Δ qua I khi và chỉ khi $\Delta' // \Delta$ hoặc $\Delta' \equiv \Delta$, đồng thời Δ' và Δ cách đều I. Từ đó suy ra phương trình Δ' có dạng :

$$ax + by + c' = 0.$$

Do $d(I ; \Delta) = d(I ; \Delta')$ nên $c' = -2(ax_0 + by_0) - c$. Vậy Δ' có phương trình :

$$ax + by - 2(ax_0 + by_0) - c = 0$$

hay $$ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

Có thể giải cách khác (xem lời giải Bài toán 5 dưới đây) như sau : Lấy một điểm M thuộc Δ, tìm điểm M' đối xứng với M qua I rồi viết phương trình Δ' qua M' và song song với Δ.

5. *Cách 1*. Hai cạnh còn lại nằm trên hai đường thẳng lần lượt đối xứng với hai đường thẳng đã cho qua I và từ đó giải như bài 4.

Cách 2. Tìm toạ độ đỉnh, chẳng hạn A, là giao điểm của hai đường thẳng đã cho. Tìm điểm C đối xứng với A qua I rồi viết phương trình hai cạnh còn lại (mỗi cạnh đi qua C và nằm trên đường thẳng song song với một trong hai đường đã cho).

ĐS : $x + 3y - 30 = 0$ và $2x - 5y + 39 = 0$.

6. a) (1) là phương trình đường tròn khi

$$\frac{m^2}{4} + (m + 1)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5} \text{ hoặc } m > 0.$$

b) Tâm đường tròn có toạ độ : $\begin{cases} x = -\dfrac{m}{2} \\ y = m + 1. \end{cases}$

Khử m từ hệ trên ta được $2x + y - 1 = 0$.

$$m < -\frac{8}{5} \Rightarrow -2x < -\frac{8}{5} \Rightarrow x > \frac{4}{5}$$

$$m > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0.$$

Vậy tập hợp tâm của các đường tròn là các điểm của đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có hoành độ $x < 0$ hoặc $x > \dfrac{4}{5}$.

7. a) $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = (x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 - (a^2 + b^2 - c)$

$$= d^2 - R^2 = \mathscr{P}_{M/(\mathscr{C})},$$

ở đây d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ và R là bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Giả sử phương trình của hai đường tròn là

$$(\mathscr{C}_1): \ x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,$$

$$(\mathscr{C}_2): \ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0.$$

Điểm $M(x_0 ; y_0)$ có cùng phương tích đối với hai đường tròn khi và chỉ khi

$x_0^2 + y_0^2 + 2a_1x_0 + 2b_1y_0 + c_1 = x_0^2 + y_0^2 + 2a_2x_0 + 2b_2y_0 + c_2$ (theo câu a)

hay $$(a_1 - a_2)x_0 + (b_1 - b_2)y_0 + \frac{c_1 - c_2}{2} = 0. \qquad (*)$$

Vì $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt có tâm là $I_1(-a_1 ; -b_1)$ và $I_2(-a_2 ; -b_2)$ nên $\overrightarrow{I_1I_2} = (a_1 - a_2 ; b_1 - b_2)$. Theo giả thiết thì $\overrightarrow{I_1I_2} \neq \vec{0}$, do vậy (*) tương đương với điều kiện M thuộc đường thẳng vuông góc với đường thẳng I_1I_2.

Tóm lại, trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm là đường thẳng vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn đó.

8. Do hai đường tròn cắt nhau nên chúng không đồng tâm. Giao điểm của hai đường tròn đó có toạ độ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0 \qquad (*)$$

Vậy nếu hai đường tròn cắt nhau tại M và N thì toạ độ của M và N thoả mãn phương trình (*), hay (*) là phương trình đường thẳng đi qua M và N.

9. a) Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình

$$a(x + 2) + b(y - 3) = 0 \ \ (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0 ; 0)$, bán kính $R = 2$.

Δ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ $\Leftrightarrow \dfrac{|2a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$

$$\Leftrightarrow |2a - 3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow b(12a - 5b) = 0.$$

Với $b = 0$ thì $a \neq 0$. Suy ra ta được một tiếp tuyến có phương trình $x + 2 = 0$.

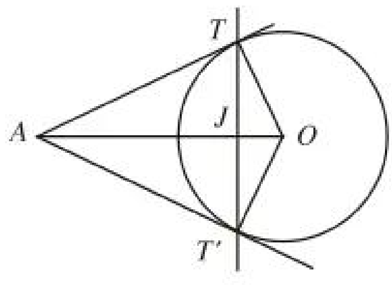
Với $12a - 5b = 0$, lấy $a = 5$ thì $b = 12$, ta được tiếp tuyến thứ hai có phương trình $5x + 12y - 26 = 0$.

b) (h. 41) Gọi T, T' là các tiếp điểm thì

$$AT^2 = AT'^2 = \mathscr{P}_{A/(\mathscr{C})} = 9 \Rightarrow AT = AT' = 3,$$

$$TT' = 2TJ = 2\frac{AT.OT}{\sqrt{AT^2 + OT^2}}$$

$$= 2.\frac{3.2}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{13}}.$$



Hình 41

10. a) Elip (E) có hai tiêu điểm $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

Hypebol (H) có hai tiêu điểm $(-3 ; 0)$ và $(3 ; 0)$.

b) HS tự vẽ.

c) $\left(-\sqrt{5} ; 0\right)$ và $\left(\sqrt{5} ; 0\right)$.

11. a) Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt khi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ 4x^2 + 5y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$ có hai nghiệm phân biệt.

ĐS : $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

b) Δ và (E) có một điểm chung khi hệ phương trình ở câu a) chỉ có một nghiệm.

ĐS : $m = \pm 2\sqrt{6}$.

12. a) *ĐS* : Elip có : Tiêu điểm $(-4 ; 0)$, $(4 ; 0)$.

Đỉnh $(-5 ; 0)$; $(5 ; 0)$ và $(0 ; -3)$; $(0 ; 3)$.

b) Hypebol (H) có hai đỉnh $(-4 ; 0)$; $(4 ; 0)$ và hai tiêu điểm $(-5 ; 0)$ và $(5 ; 0)$.

Giả sử phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} a = 4 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

c) Học sinh tự vẽ.

d) Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

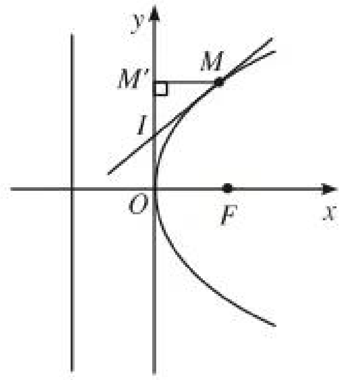
dễ dàng tính được

$$x^2 = \frac{2}{\frac{1}{25} + \frac{1}{16}} = \frac{2.25.16}{41} \; ; \; y^2 = 9\left(1 - \frac{2.16}{41}\right) = \frac{81}{41}.$$

Từ đó ta có : $x^2 + y^2 = \frac{881}{41}$. Vậy phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E) và (H) là : $x^2 + y^2 = \frac{881}{41}$.

13. (h. 42) $M(x_0\,;\,y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0^2 = 2px_0$. Dễ thấy

$I = \left(0\,;\,\dfrac{y_0}{2}\right)$.



Hình 42

Vì $M \neq O$ nên phương trình đường thẳng IM có dạng

$$\frac{x}{x_0} - \frac{2y}{y_0} + 1 = 0.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ \dfrac{x}{x_0} - \dfrac{2y}{y_0} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = \dfrac{2x_0}{y_0}y - x_0$.

Thay vào (1) ta được : $y^2 = 2p\left(\dfrac{2x_0}{y_0}y - x_0\right)$.

Mặt khác lại có $x_0 = \dfrac{y_0^2}{2p}$, vì vậy $y^2 = 2p\left(\dfrac{y_0 y}{p} - \dfrac{y_0^2}{2p}\right)$

hay $$y^2 - 2y_0y + y_0^2 = 0.$$

Phương trình cuối có nghiệm kép $y = y_0$, suy ra hệ gồm phương trình (1) và (2) có đúng một nghiệm, do đó đường thẳng IM chỉ có chung với (P) điểm M.

14. Đặt $M = (x_1\,;\,y_1)$, $N = (x_2\,;\,y_2)$. Do M và N thuộc (P) nên $x_1 = 2y_1^2$, $x_2 = 2y_2^2$ (với x_1, x_2, y_1, y_2 khác 0).

Điều kiện để $OM \perp ON$ là $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Từ đó suy ra

$$y_1y_2 = -\frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Phương trình đường thẳng MN là :

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + y_1x_2 - x_1y_2 = 0$$

hay $$(y_2 - y_1)[x - 2(y_1 + y_2)y + 2y_1y_2] = 0.$$

Ta có $y_1 \neq y_2$, vì nếu $y_1 = y_2$ thì $x_1 = x_2$, do đó $M \equiv N$, không thoả mãn đầu bài.

Vậy phương trình của MN là :

$$x - 2(y_1 + y_2)y + 2y_1y_2 = 0$$

hay $$x - 2(y_1 + y_2)y - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(do (*))}.$$

Dễ thấy rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đáp án bài tập trắc nghiệm

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (A)	**4.** (D)
5. (A)	**6.** (D)	**7.** (B)	**8.** (A)
9. (B)	**10.** (B)	**11.** (A)	**12.** (B)
13. (A)	**14.** (D)	**15.** (A)	**16.** (D)
17. (D)	**18.** (B)	**19.** (A)	**20.** (C)
21. (A)	**22.** (D)	**23.** (D)	**24.** (C)