

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

A - MỤC TIÊU

- Giúp HS hiểu cách biến đổi hệ phương trình bằng quy tắc cộng đại số.
- HS cần nắm vững cách giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số. Kỹ năng giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bắt đầu nâng cao dần lên.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

• Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi tương đương các hệ phương trình nói chung. Khác với quy tắc thế, để đạt được mục đích là khử bớt một ẩn, ta phải sử dụng quy tắc cộng đại số kết hợp với việc biến đổi các phương trình của hệ một cách hợp lý. Đó là điều không đơn giản. Do đó, phương pháp tiếp cận được sử dụng trong SGK là dẫn dắt từ trường hợp đơn giản (các hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau) đến trường hợp phức tạp, đòi hỏi phải biến đổi phương trình để đưa về trường hợp thứ nhất.

• Nói chung trước khi giải hệ phương trình, nên tạo cho HS thói quen nhận xét về số nghiệm của hệ (có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm). Nếu không chắc rằng hệ vô nghiệm hay có vô số nghiệm thì giải bằng phương pháp cộng đại số (hoặc phương pháp thế). Nếu chắc chắn rằng hệ vô nghiệm hay có vô số nghiệm thì nên lập luận để rút ra tập nghiệm mà không cần dùng phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế (xem *Những điểm cần lưu ý* của §3).

• Tuy nhiên, đối với một hệ phương trình, nếu sử dụng quy tắc cộng đại số để khử ẩn mà dẫn đến một phương trình, trong đó các hệ số của cả hai ẩn đều bằng 0, nghĩa là phương trình có dạng $0x + 0y = m$ (m là một số nào đó) thì hệ vô nghiệm khi $m \neq 0$, vô số nghiệm khi $m = 0$. Trường hợp $m = 0$, hệ có vô số nghiệm, ta vẫn phải trở về một trong hai phương trình đã cho để tìm tập nghiệm của hệ.

C - GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

– Bước đầu, khi trình bày lời giải hệ phương trình, GV nên yêu cầu HS viết rõ hệ phương trình thu được sau khi sử dụng quy tắc cộng đại số, như trong SGK đã trình bày. Ví dụ, đối với hệ phương trình (II), sau khi cộng từng vế hai

phương trình trong hệ và thu gọn, ta được phương trình $x = 3$ không chứa ẩn y , GV cần viết rõ :

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}, \text{ hoặc } (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

rồi mới giải tiếp đến kết quả cuối cùng. Chỉ sau khi HS đã nắm vững rồi, GV mới cho phép trình bày theo cách viết gọn. Chẳng hạn, đối với hệ (II), có thể trình bày như sau :

Cộng từng vế hai phương trình trong hệ, ta được

$$(2x + y) + (x - y) = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Thay thế giá trị $x = 3$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$y = x - 6 = 3 - 6 = -3.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3; -3)$.

– Trong ?5, HS có thể nêu ra nhiều cách đưa hệ phương trình (IV) về trường hợp thứ nhất. Chẳng hạn, sau đây là một cách :

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3, phương trình thứ hai với -2 , ta được hệ

$$\begin{cases} 9x + 6y = 21 \\ -4x - 6y = -6. \end{cases}$$

Như vậy, ta cũng đưa được hệ về trường hợp thứ nhất. Giải tiếp bằng phương pháp cộng đại số, ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$$

D - HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

20. a) Đáp số : $(2; -3)$. Giải :

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

b) Đáp số: $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

c) Đáp số: $(3; -2)$.

d) Đáp số: $(-1; 0)$.

e) Đáp số: $(5; 3)$.

21. a) Đáp số: $\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Giải: Nhân phương trình thứ nhất với $-\sqrt{2}$, ta được

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 3\sqrt{2}y = -\sqrt{2} \\ 2x + \sqrt{2}y = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}y = -\sqrt{2} - 2 \\ 2x + \sqrt{2}y = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y = \frac{-1 - \sqrt{2}}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Nghiệm của hệ là $\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

b) Đáp số: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Giải: Nhân phương trình thứ nhất với $\sqrt{2}$ rồi cộng từng vế hai phương trình, ta được

$$5x\sqrt{6} + x\sqrt{6} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Từ đó, hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22. Đáp số: a) $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$; b) Vô nghiệm; c) $(x; y)$ với $x \in \mathbf{R}$ và $y = \frac{3}{2}x - 5$.

23. a) Đáp số: $\left(\frac{-6+7\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *Hướng dẫn:* Trừ từng vế hai phương trình để tính y . Kết quả là $x = \frac{-6+7\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

24. Đáp số: $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{13}{2}\right)$.

a) *Cách 1:* Đặt $x + y = u$, $x - y = v$, ta có hệ phương trình (ẩn u, v):

$$\begin{cases} 2u + 3v = 4 \\ u + 2v = 5. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(u; v) = (-7; 6)$. Suy ra hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = 6 \end{cases}. \text{Từ đó, } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{13}{2}. \end{cases}$$

Cách 2: Thu gọn vế trái của hai phương trình trong hệ, ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}. \text{Từ đó, } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{13}{2}. \end{cases}$$

b) *Đáp số:* $(x; y) = (1; -1)$.

25. Đáp số: $m = 3; n = 2$.

Hướng dẫn: Ta phải giải hệ phương trình $\begin{cases} 3m - 5n + 1 = 0 \\ 4m - n - 10 = 0. \end{cases}$

26. a) Vì $A(2; -2)$ thuộc đồ thị nên $2a + b = -2$.

Vì $B(-1; 3)$ thuộc đồ thị nên $-a + b = 3$. Ta có hệ phương trình ẩn là a và b :

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases}. \text{Từ đó, } \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

b) *Dáp số*: $a = \frac{1}{2}$; $b = 0$.

c) *Dáp số*: $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$.

d) *Dáp số*: $a = 0$; $b = 2$.

27. *Dáp số*: a) $\left(\frac{7}{9}; \frac{7}{2}\right)$; b) $\left(\frac{19}{7}; \frac{8}{3}\right)$.

E - TÀI LIỆU BỔ SUNG

Một số quy tắc biến đổi tương đương các hệ hai phương trình hai ẩn số :

Dưới đây, ta sử dụng cách viết tắt, chẳng hạn, phương trình $f(x; y) = g(x; y)$ thì viết là $f = g$. Kí hiệu p và q là hai số thực nào đó.

Quy tắc 1. $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pf_1 = pg_1 \\ qf_2 = qg_2 \end{cases}$ (với $p \neq 0$ và $q \neq 0$).

Quy tắc 2 (quy tắc cộng đại số).

a) $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_1 + f_2 = g_1 + g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = g_1 + g_2 \\ f_2 = g_2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \\ f_2 = g_2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \\ f_1 + f_2 = g_1 + g_2 \end{cases}$.

Quy tắc 3

a) $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = g_1 \\ pf_1 + qf_2 = pg_1 + qg_2 \end{cases}$ (với $q \neq 0$, p tùy ý);

b) $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pf_1 + qf_2 = pg_1 + qg_2 \\ f_2 = g_2 \end{cases}$ (với $p \neq 0$, q tùy ý).