§5. Công thức nghiệm thu gọn

A - MỤC TIÊU

– HS thấy được lợi ích của công thức nghiệm thu gọn.

– HS xác định được b' khi cần thiết và nhớ kĩ công thức tính Δ'.

– HS nhớ và vận dụng tốt công thức nghiệm thu gọn ; hơn nữa biết sử dụng triệt để công thức này trong mọi trường hợp có thể để làm cho việc tính toán đơn giản hơn.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

• Về phương diện lí thuyết thì công thức nghiệm thu gọn có thể dùng được trong mọi trường hợp. Tuy nhiên, trong thực hành thì nó chỉ có lợi khi b là một số chẵn hoặc là bội chẵn của một căn, của một biểu thức, chẳng hạn, $b = -6$ hay $b = 4\sqrt{3}$ hoặc $b = 2(m - 1)$,...

• Để giúp HS hiểu sâu sắc công thức nghiệm thu gọn, có thể giải thích rằng vì $b = 2b'$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\Delta'}$ và mẫu số trong công thức nghiệm (tổng quát) là 2a nên mẫu số trong công thức nghiệm thu gọn chỉ là a.

C - GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

– Nếu HS khá, có thể dẫn đến bài học bằng cách cho HS giải phương trình

$$3x^2 - 2x - 7 = 0.$$

HS sẽ tìm được : $\Delta = 2^2 - 4.3.(-7) = 88$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{22}$;

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{22}}{2.3} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}.$$

Tiếp tục trình bày như SGK.

– Thực hiện hoạt động $\boxed{?1}$. HS tự làm độc lập. Sau đó, GV nên viết kết quả lên bảng vắn tắt như sau :

• $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

• $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm.

Nhờ đó cho HS phát biểu lại kết luận.

– GV có thể chỉ rõ cách dùng Δ' đơn giản hơn ở chỗ Δ' và nghiệm được tính với những số nhỏ hơn.

– Thực hiện hoạt động $\boxed{?2}$.

– Thực hiện hoạt động $\boxed{?3}$.

D - HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

17. a) $b' = 2$, $\Delta' = 2^2 - 4.1 = 0$. Phương trình có nghiệm kép :

$x_1 = x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

b) $b' = -7$, $\Delta' = (-7)^2 - 13852.1 = 49 - 13852 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

c) $b' = -3$, $\Delta' = (-3)^2 - 5.1 = 4$, $\sqrt{\Delta'} = 2$;

$x_1 = \frac{3+2}{5} = 1$, $x_2 = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$.

d) $b' = 2\sqrt{6}$, $\Delta' = (2\sqrt{6})^2 - (-3).4 = 24 + 12 = 36$, $\sqrt{\Delta'} = 6$;

$x_1 = \frac{-2\sqrt{6}+6}{-3} = \frac{2\sqrt{6}-6}{3}$, $x_2 = \frac{-2\sqrt{6}-6}{-3} = \frac{2\sqrt{6}+6}{3}$.

Lưu ý HS rằng nên đổi dấu hai vế của phương trình để hệ số $a > 0$.

18. a) $3x^2 - 2x = x^2 + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$; $b' = -1$, $\Delta' = (-1)^2 - 2.(-3) = 7$.

$x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}82$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0{,}82$.

b) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x+1)(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0$; $b' = -2\sqrt{2}$,

$\Delta' = (-2\sqrt{2})^2 - 3.2 = 2$;

$x_1 = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, $x_2 = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47$.

c) $3x^2 + 3 = 2(x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0$; $b' = -1$, $\Delta' = (-1)^2 - 3.1 = -2 < 0$.
Phương trình vô nghiệm.

d) $0{,}5x(x + 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$; $b' = -2{,}5$; $\Delta' = (-2{,}5)^2 - 1.2 = 4{,}25$;

$x_1 = 2{,}5 + \sqrt{4{,}25} \approx 4{,}56$, $x_2 = 2{,}5 - \sqrt{4{,}25} \approx 0{,}44$.

(Rõ ràng trong trường hợp này dùng công thức nghiệm thu gọn cũng không đơn giản hơn.)

19. Khi a > 0 và phương trình vô nghiệm thì $b^2 - 4ac < 0$. Do đó $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$.

Suy ra

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

20. a) $25x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$.

b) Phương trình vô nghiệm vì vế trái là $2x^2 + 3 \geq 3$ còn vế phải bằng 0.

c) $x_1 = 0$, $x_2 = -1{,}3$.

d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 + \sqrt{3} = 0$;

$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 4.(-1 + \sqrt{3}) = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$, $\sqrt{\Delta'} = 2 - \sqrt{3}$;

$x_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

21. a) $x^2 = 12x + 288 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 288 = 0$;

$\Delta' = (-6)^2 - 1.(-288) = 36 + 288 = 324$, $\sqrt{\Delta'} = 18$;

$x_1 = 6 + 18 = 24$, $x_2 = 6 - 18 = -12$.

b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 228 = 0$;

$\Delta = 49 - 4.(-228) = 49 + 912 = 961 = 31^2$;

$x_1 = \frac{-7 + 31}{2} = 12$, $x_2 = \frac{-7 - 31}{2} = -19$.

Chú ý. Hình như có điều gì kì lạ ! Vì sao x_1 bằng mẫu số 12, còn x_2 lại bằng số hạng tự do của phương trình bậc hai đã cho. Đến bài hệ thức Vi-ét, ta sẽ giải thích được điều này. Thật vậy, phương trình $x^2 + 7x - 12.19 = 0$ tương đương với phương trình đã cho có hệ số $b = 19 - 12$ hay $-b = 12 + (-19)$ và hệ số $c = 12.(-19)$.

Như vậy, có thể thiết lập vô số phương trình dạng An Khô-va-ri-zmi.

Khi dạy bài hệ thức Vi-ét, có thể nêu điều này như một bài toán vui.

22. a) Vì ac = $-15.2005 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Vì $ac = \frac{19}{5}.(-1890) < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chú ý : Nên cho HS vận dụng điều này thường xuyên mỗi khi có thể.

23. a) Khi t = 5 (phút) thì $v = 3.5^2 - 30.5 + 135 = 60$ (km/h).

b) Khi v = 120 (km/h), để tìm t ta giải phương trình $120 = 3t^2 - 30t + 135$ hay $t^2 - 10t + 5 = 0$.

$\Delta' = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$, $\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{5}$.

$t_1 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9{,}47$, $t_2 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0{,}53$.

Vì ra đa chỉ theo dõi trong 10 phút nên $0 < t \leq 10$, do đó cả hai giá trị của t đều thích hợp. *Đáp số :* $t_1 \approx 9{,}47$ (phút), $t_2 \approx 0{,}53$ (phút).

24. Xét phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

a) $\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = 1 - 2m$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $1 - 2m > 0$ hay khi $m < \frac{1}{2}$.

c) Phương trình có nghiệm kép khi $m = \frac{1}{2}$.

d) Phương trình vô nghiệm khi $m > \frac{1}{2}$.