

§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

A - MỤC TIÊU

– HS thực hành tốt việc giải một số dạng phương trình quy được về phương trình bậc hai như : phương trình trùng phương, phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, một vài dạng phương trình bậc cao có thể đưa về phương trình tích hoặc giải được nhờ ẩn phụ.

– Biết cách giải phương trình trùng phương.

– HS nhớ rằng khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, trước hết phải tìm điều kiện của ẩn và sau khi tìm được giá trị của ẩn thì phải kiểm tra để chọn giá trị thoả mãn điều kiện ấy.

– HS giải tốt phương trình tích và rèn luyện kĩ năng phân tích đa thức thành nhân tử.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

• Cần luôn luôn lưu ý đến việc kiểm tra giá trị tìm được của ẩn khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu số.

• Khi giải phương trình trùng phương, nên lưu ý HS đến điều kiện của ẩn phụ $t = x^2$, đó là $t \geq 0$. Việc này tuy không thật quan trọng trong thực hành giải phương trình trùng phương, song nó lại rất cần khi các em học lên các lớp trên. Thật vậy, khi giải phương trình trùng phương, sau khi tìm được giá trị của t , ta tiếp tục giải phương trình $x^2 = t$, nếu $t < 0$ thì phương trình này vô nghiệm. Nhưng khi giải bất phương trình

$$x^2 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 9 < 0,$$

ở lớp 10, HS có thể đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Nếu không biết cách đặt điều kiện $t \geq \sqrt{2}$ thì sẽ không tìm được tập nghiệm của bất phương trình.

Vì thế, lưu ý HS đến điều này chính là tạo cho các em một thói quen đặt điều kiện cho ẩn phụ.

C - GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

– Có thể dẫn đến bài học như sau : "Ở lớp 8, sau khi biết cách giải phương trình bậc nhất tổng quát $ax + b = 0$, ta có thể giải được những phương trình phức tạp hơn nếu như ta có thể biến đổi chúng về dạng này. Bây giờ, ta cũng sẽ xét đến những phương trình không phải là bậc hai nhưng có thể biến đổi để đưa về phương trình bậc hai".

1. Phương trình trùng phương

– GV giới thiệu định nghĩa và cho ví dụ minh họa định nghĩa, nhận xét, rồi gợi ý cách giải : "Nếu ta thay $x^2 = t$ thì phương trình đã cho có dạng như thế nào ?"

Đặt điều kiện cho ẩn phụ t .

– Thực hiện hoạt động [?1].

Có thể chia lớp thành nhiều nhóm để mỗi nhóm làm một bài tập về giải phương trình trùng phương, trong đó có các trường hợp phương trình có 3 nghiệm, 2 nghiệm, 1 nghiệm, vô nghiệm. Chẳng hạn, giải các phương trình :

$$x^4 - 9x^2 = 0, \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \quad x^4 + x^2 = 0, \quad x^4 + 4x^2 + 3 = 0.$$

Hiển nhiên, hai phương trình thứ nhất và thứ ba có thể giải bằng phương trình tích. Song, các ví dụ này chỉ để minh họa cho số nghiệm có thể có của phương trình trùng phương.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

- Có thể cho HS nhắc lại các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức.
- Thực hiện hoạt động [?2].

Sau khi HS đã tìm được $x_1 = 1, x_2 = 3$, để lưu ý HS đến việc kiểm tra điều kiện của ẩn, GV có thể đặt câu hỏi: "Ta có thể kết luận rằng $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$ đều là nghiệm của phương trình đã cho được không?"

3. Phương trình tích

Việc giải một phương trình tích (đã có sẵn) dễ dàng. Vì thế, có thể cho thực hiện luôn hoạt động [?3].

D - HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

34. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t_1 = 1, t_2 = 4$;

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 2.$$

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$ (loại).

$$x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}.$$

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có $3t^2 + 10t + 3 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{3}$

(loại), $t_2 = -3$ (loại).

Phương trình vô nghiệm.

35. a) $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x) \Leftrightarrow x^2 - 9 + 6 = 3x - 3x^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 3 = 0; \Delta = 57;$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{8}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{8}.$$

b) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$. Điều kiện $x \neq 2, x \neq 5$.

$$(x+2)(2-x) + 3(x-5)(2-x) = 6(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 - 3x^2 + 21x - 30 = 6x - 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0.$$

$$\Delta = 225 + 64 = 289, \sqrt{\Delta} = 17;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{4}$.

$$c) \frac{4}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)(x+2)}. \text{ Điều kiện : } x \neq -1, x \neq -2.$$

$4x + 8 = 2 - x^2 - x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$; $x_1 = -2, x_2 = -3$. Vì $x_1 = -2$ không thỏa mãn điều kiện của ẩn nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = -3$.

$$36. a) (3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$b) (2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 4 + 2x - 1)(2x^2 + x - 4 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(2x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = 0 \\ 2x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2,5; x_3 = -1, x_4 = 1,5.$$

$$37. a) 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \text{ Đặt } x^2 = t \text{ (} t \geq 0 \text{)}, \text{ ta có } 9t^2 - 10t + 1 = 0.$$

Vì $a + b + c = 9 - 10 + 1 = 0$ nên $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{3}.$$

$$b) 5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2 \Leftrightarrow 5x^4 + 3x^2 - 26 = 0. \text{ Đặt } x^2 = t \text{ (} t \geq 0 \text{)}, \text{ ta có :}$$

$$5t^2 + 3t - 26 = 0.$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot 5 \cdot 26 = 529 = 23^2, t_1 = 2, t_2 = -2,6 \text{ (loại).}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}.$$

c) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 + 5 = 0$. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có $t^2 + 6t + 5 = 0$, $t_1 = -1$ (loại), $t_2 = -5$ (loại). Phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Cũng có thể nhận xét rằng vế trái $x^4 + 6x^2 + 5 \geq 5$, còn vế phải bằng 0. Vậy phương trình vô nghiệm.

d) $2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5 - \frac{1}{x^2} = 0$. Điều kiện : $x \neq 0$.

$2x^4 + 5x^2 - 1 = 0$. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có

$2t^2 + 5t - 1 = 0$; $\Delta = 25 + 8 = 33$; $t_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$, $t_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}$ (loại).

$$x_1 = \frac{\sqrt{-5 + \sqrt{33}}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{-5 + \sqrt{33}}}{2}.$$

38. a) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 23 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = 23 - 3x$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$;

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
;

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -2.$$

b) $x^3 + 2x^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)(x^2 - 2)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x^2 + 6x - 9 = x^3 - x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 11 = 0$$
;

$$\Delta' = 16 + 22 = 38$$
;

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{38}}{2}, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{38}}{2}.$$

c) $(x - 1)^3 + 0,5x^2 = x(x^2 + 1,5) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 0,5x^2 = x^3 + 1,5x$

$$\Leftrightarrow 2,5x^2 - 1,5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 2 = 0$$
;

$\Delta = 9 - 40 < 0$, phương trình vô nghiệm.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{x(x-7)}{3} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{x-4}{3} \Leftrightarrow 2x(x-7) - 6 = 3x - 2(x-4) \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 14x - 6 = 3x - 2x + 8 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 14 = 0 ;
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 225 + 112 = 337 ;$$

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{337}}{4}, \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{337}}{4}.$$

$$\text{e) } \frac{14}{x^2 - 9} = 1 - \frac{1}{3-x}. \text{ Điều kiện : } x \neq \pm 3.$$

$$14 = x^2 - 9 + x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 ;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -5.$$

$$\text{f) } \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}. \text{ Điều kiện : } x \neq -1, x \neq 4.$$

$$2x(x-4) = x^2 - x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - x^2 + x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 ; x_1 = -1, x_2 = 8.$$

Vì $x_1 = -1$ không thỏa mãn điều kiện của ẩn nên phương trình có một nghiệm là $x = 8$.

$$\text{39. a) } (3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 7x - 10 = 0 & (1) \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1) : } x_1 = -1, x_2 = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Giải (2) : } x_3 = 1, x_4 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}.$$

$$\text{b) } x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) - 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x^2-2=0 \end{cases} ;$$

$$x_1 = -3, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}.$$

$$c) (x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x \Leftrightarrow (0,6x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases};$$

$$x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$d) (x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)^2 - (x^2 - x + 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5 + x^2 - x + 5)(x^2 + 2x - 5 - x^2 + x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x)(3x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

40. a) $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0$. Đặt $t = x^2 + x$, ta có :

$$3t^2 - 2t - 1 = 0; t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{3}.$$

- Với $t_1 = 1$, ta có : $x^2 + x = 1$ hay $x^2 + x - 1 = 0$;

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

- Với $t_2 = -\frac{1}{3}$, ta có $x^2 + x = -\frac{1}{3}$ hay $3x^2 + 3x + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

b) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$. Đặt $t = x^2 - 4x + 2$, ta có phương trình $t^2 + t - 6 = 0$. Giải ra, ta được $t_1 = 2, t_2 = -3$.

- Với $t_1 = 2$, ta có $x^2 - 4x + 2 = 2$ hay $x^2 - 4x = 0$. Suy ra $x_1 = 0, x_2 = 4$.

- Với $t_2 = -3$, ta có $x^2 - 4x + 2 = -3$ hay $x^2 - 4x + 5 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = 0, x_2 = 4$.

c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7 \Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} - 7 = 0$. Điều kiện : $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$), ta có

$$t^2 - 6t - 7 = 0. \text{ Suy ra : } t_1 = -1 \text{ (loại)}, t_2 = 7.$$

Với $t = 7$, ta có $\sqrt{x} = 7$. Suy ra $x = 49$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 49$.

d) $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$. Điều kiện : $x \neq -1, x \neq 0$.

Đặt $\frac{x}{x+1} = t$, ta có $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{t}$. Vậy ta có phương trình $t - \frac{10}{t} - 3 = 0$ hay

$$t^2 - 3t - 10 = 0. \text{ Suy ra } t_1 = 5, t_2 = -2.$$

- Với $t_1 = 5$, ta có $\frac{x}{x+1} = 5$ hay $x = 5x + 5$. Suy ra $x = -\frac{5}{4}$.

- Với $t_2 = -2$, ta có $\frac{x}{x+1} = -2$ hay $x = -2x - 2$. Suy ra $x = -\frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = -\frac{5}{4}, x_2 = -\frac{2}{3}$.