

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

A. PHẦN ĐẠI SỐ

1. Chọn (C).

$$2. M = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} \\ = (\sqrt{2}-1) - (2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1-2-\sqrt{2} = -3.$$

$$N = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow N^2 = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4+2\sqrt{4-3} = 6.$$

Vì $N > 0$ nên từ $N^2 = 6$ suy ra $N = \sqrt{6}$.

3. Chọn (D).

$$\text{Giải thích: } \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2(2+2\sqrt{3})}{3\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{4(1+\sqrt{3})}{3(1+\sqrt{3})} = \frac{4}{3}.$$

4. Chọn (D).

Giải thích: Bình phương hai vế, ta được: $2+\sqrt{x} = 3^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 7 \Rightarrow x = 49$.

5. (Điều kiện $0 \leq x \neq 1$)

Đặt $\sqrt{x} = a$ thì biểu thức trở thành:

$$\left(\frac{2+a}{a^2+2a+1} - \frac{a-2}{a^2-1} \right) \cdot \frac{a^3+a^2-a-1}{a} = \frac{(2+a)(a-1)-(a-2)(a+1)}{(a+1)^2(a-1)} \cdot \frac{a^2(a+1)-(a+1)}{a} \\ = \frac{2a-2+a^2-a-a^2+a+2}{(a+1)(a+1)(a-1)} \cdot \frac{(a+1)(a^2-1)}{a} \\ = \frac{2a}{a} = 2.$$

6. a) $a = 2, b = 1$; b) $a = 1, b = 1$.

7. a) $m = 1, n = 5$; b) $m \neq 1$; c) $m = 1, n \neq 5$.

8. Khi $x = 0$ thì $y = -\frac{1}{2}$ với mọi k . Vậy các đường thẳng $(k+1)x - 2y = 1$

luôn đi qua điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

9. a) Trường hợp $y \geq 0$, hệ có nghiệm $x = 2, y = 3$.

Trường hợp $y < 0$, hệ có nghiệm $x = -\frac{4}{7}, y = -\frac{33}{7}$.

b) Đặt $\sqrt{x} = X (X \geq 0), \sqrt{y} = Y (Y \geq 0)$.

Hệ có nghiệm $x = 0, y = 1$.

10. a) Đặt $\sqrt{x-1} = X (X \geq 0), \sqrt{y-1} = Y (Y \geq 0)$.

Hệ có nghiệm $x = 2, y = 2$.

b) Đặt $(x-1)^2 = X (X \geq 0)$.

Hệ có hai nghiệm $\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$ và $\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$.

11. Gọi số sách ở giá thứ nhất là x , ở giá thứ hai là y (x và y nguyên dương).

$$\text{Ta có hệ : } \begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50) \end{cases}$$

Từ đó : $x = 300, y = 150$.

12. Gọi vận tốc lúc lên dốc và vận tốc lúc xuống dốc thứ tự là x, y (km/h) ($x > 0, y > 0$).

$$\text{Ta có hệ : } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{40}{60} \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60} \end{cases}$$

Từ đó : $x = 12, y = 15$.

13. Hệ số $a = \frac{1}{4}$, hàm số là $y = \frac{1}{4}x^2$. GV tự vẽ đồ thị.

14. Chọn (B).

15. Chọn (C).

Giải thích : Nghiệm chung x (nếu có) của hai phương trình là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - x - a = 0 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế (1) và (2), ta được :

$$(a+1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Thay $a = -1$ vào (2), ta có $x^2 - x + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm nên loại $a = -1$.

Thay $x = -1$ vào (2), ta có $a = 2$. Khi đó, hai phương trình có nghiệm chung là $x = -1$.

16. a) $2x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 3x + 6x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x+1) - 3x(x+1) + 6(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 6 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $x + 1 = 0$, ta được $x = -1$.

Phương trình $2x^2 - 3x + 6 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

b) $x(x+1)(x+4)(x+5) = 12$

$$[x(x+5)].[(x+1)(x+4)] = 12$$

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 4) = 12.$$

Đặt $x^2 + 5x + 2 = y$, ta có $(y-2)(y+2) = 12$

$$\Leftrightarrow y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 4.$$

Với $y = 4$, giải phương trình $x^2 + 5x + 2 = 4$, ta được $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$,

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}.$$

Với $y = -4$, giải phương trình $x^2 + 5x + 2 = -4$, ta được $x_3 = -2$, $x_4 = -3$.

Vậy tập nghiệm là $S = \left\{ -2; -3; \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2} \right\}$.

17. Trả lời : 10 chiếc ghế băng.

18. Gọi độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó là x và y ($x > y > 0$).

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10^2. \end{cases}$$

Từ đó : $x = 8, y = 6$.

B. PHẦN HÌNH HỌC

1. Gọi độ dài cạnh AB là x thì độ dài cạnh BC là $\frac{20}{2} - x = 10 - x$. Theo định lí

Py-ta-go, ta có :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2(x^2 - 10x + 50)$$

$$= 2[(x - 5)^2 + 25] \geq 50. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của đường chéo AC là $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (cm).

2. Chọn (B).

Giải thích : Hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) thì $AH = 8 : 2 = 4$. Tam giác AHB vuông cân ở H nên $AB = 4\sqrt{2}$.

3. (h. 139)

Gọi D là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } BD = \frac{2}{3}BN.$$

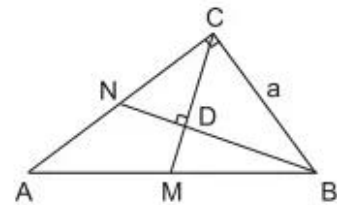
Trong tam giác vuông BCN , ta có :

$$BN \cdot BD = BC^2 \Rightarrow BN \cdot \frac{2BN}{3} = BC^2 \Rightarrow \frac{2BN^2}{3} = a^2$$

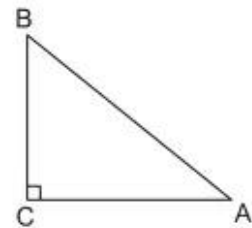
$$\Rightarrow BN^2 = \frac{3a^2}{2}. \text{ Vậy } BN = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

4. Chọn (D) (h.140).

$$\text{Giải thích : } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = \frac{3BC}{2}.$$



Hình 139



Hình 140

Trong tam giác vuông ABC, ta có

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{9BC^2}{4} - BC^2} = \sqrt{\frac{5}{4}BC^2} = BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

5. (h.141)

Đặt $AH = x$ ($x > 0$), ta có :

$$\begin{aligned} AC^2 = AH \cdot AB &\Leftrightarrow 15^2 = x(x + 16) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 16x - 225 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình này, ta được :

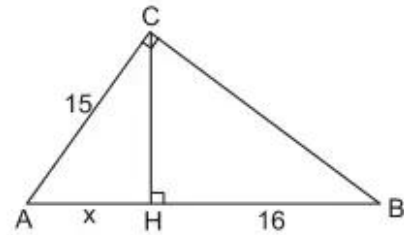
$$x_1 = 9 ; x_2 = -25 \text{ (loại).}$$

Vậy $AH = 9$ (cm), suy ra :

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ (cm).}$$

Diện tích tam giác ABC là :

$$\frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} (9 + 16) \cdot 12 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 141

6. Chọn (B).

Giải thích : (h.142).

Từ O kẻ bán kính vuông góc với BC, cắt BC ở P, cắt EF ở Q. Ta có :

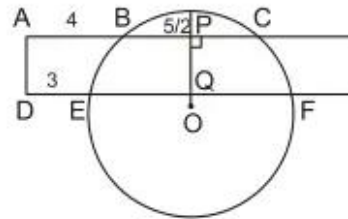
$$BP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2},$$

$$AP = AB + BP = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}.$$

Ta lại có $DQ = AP$, suy ra :

$$EQ = DQ - DE = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Vậy } EF = 2 \cdot EQ = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7.$$



Hình 142

7. (h. 143)

$$a) \Delta BOD \sim \Delta CEO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{CO}{CE}$$

$$\Rightarrow BD \cdot CE = OB \cdot OC = \frac{BC^2}{4} \text{ (không đổi).}$$

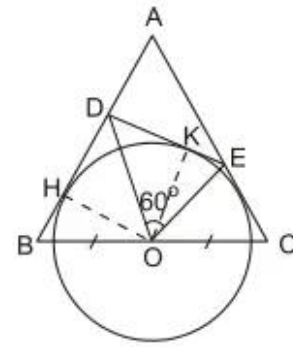
b) Từ kết quả câu a) suy ra :

$$\frac{OD}{OE} = \frac{BD}{OC} = \frac{BD}{BO}. \text{ Lại có } \widehat{B} = \widehat{DOE} = 60^\circ, \text{ dẫn}$$

tới $\Delta BOD \sim \Delta OED$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BDO} = \widehat{ODE}$. Vậy DO là tia phân giác của góc BDE.

c) Vẽ $OK \perp DE$. Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (O) với cạnh AB. Chứng minh $OK = OH$.



Hình 143

8. (h. 144).

$$\text{Ta có } \frac{r}{R} = \frac{PO'}{PO} = \frac{PA}{PB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

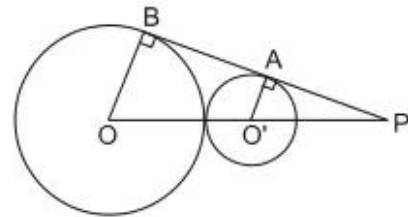
$$\Rightarrow R = 2r \text{ và } PO' = OO' = R + r = 3r.$$

Trong tam giác vuông PAO', ta có :

$$(PO')^2 = PA^2 + O'A^2,$$

$$\text{tức là } (3r)^2 = 4^2 + r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2.$$

Vậy diện tích hình tròn (O') là $\pi r^2 = 2\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.



Hình 144

9. Chọn (D).

Giải thích (h.145).

AB, AC tiếp xúc với đường tròn (O), AD đi qua O nên ta có :

$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \alpha.$$

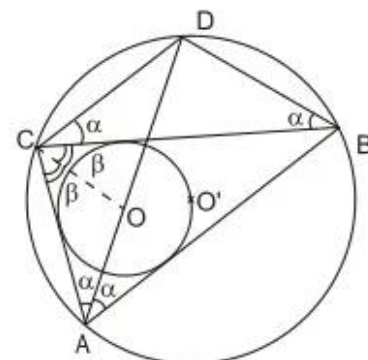
Tương tự : $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = \beta$.

Do đó $\widehat{CD} = \widehat{BD}$, suy ra $CD = BD$

Mặt khác :

$$\widehat{OCD} = \widehat{OCB} + \widehat{BCD} = \beta + \alpha ;$$

(1)



Hình 145

$$\widehat{COD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = \alpha + \beta \text{ (góc ngoài của tam giác AOC).}$$

Do đó, từ $\widehat{OCD} = \widehat{COD}$, suy ra tam giác ODC cân ở D. Vậy $CD = OD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CD = OD = BD$.

10. Chọn (C).

Giải thích : Các cung AB, BC, CA tạo thành đường tròn, do đó :

$$(x + 75^\circ) + (2x + 25^\circ) + (3x - 22^\circ) = 360^\circ \Leftrightarrow x = 47^\circ.$$

Vậy các góc của tam giác ABC là :

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}(2x + 25^\circ) = 59,5^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{2}(3x - 22^\circ) = 59,5^\circ$$

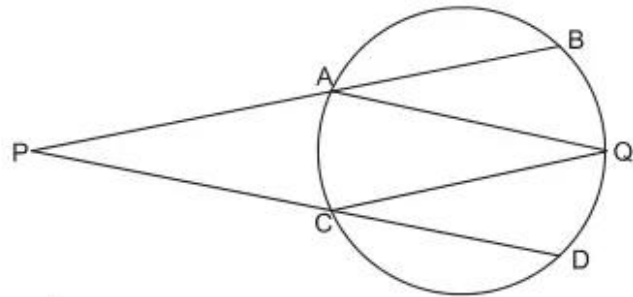
$$\widehat{C} = \frac{1}{2}(x + 75^\circ) = 61^\circ.$$

11. (h.146)

$$\widehat{BPD} = \frac{\text{sd}\widehat{BQD} - \text{sd}\widehat{AC}}{2},$$

$$\widehat{AQC} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AC}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BPD} + \widehat{AQC} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{BQD} = \frac{1}{2}(42^\circ + 38^\circ) = 40^\circ.$$



Hình 146

12. Gọi cạnh hình vuông là a, bán kính hình tròn là R.

$$\text{Ta có } 4a = 2\pi R \Rightarrow a = \frac{\pi R}{2}.$$

Lập tỉ số diện tích của hình vuông và hình tròn :

$$\frac{a^2}{\pi R^2} = \frac{\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Vậy hình tròn có diện tích lớn hơn hình vuông.

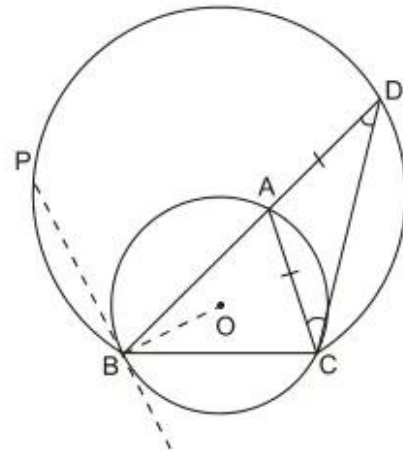
13. (h.147) Tam giác ACD có AC = AD,

$$\text{suy ra } \widehat{D} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ.$$

Điểm D tạo với hai mút của đoạn thẳng BC cố định góc BDC bằng 30° nên D chuyển động trên cung chứa góc 30° dựng trên BC.

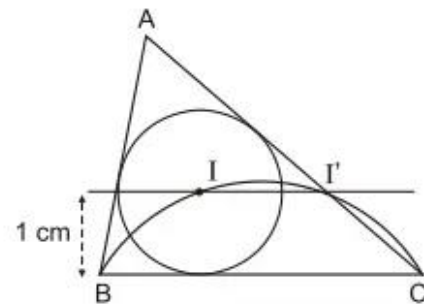
Khi $A \equiv C$ thì $D \equiv C$, khi $A \equiv B$ thì $D \equiv P$ (BP là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B).

Vậy khi A di chuyển trên cung lớn BC thì D di chuyển trên cung CP thuộc cung chứa góc 30° dựng trên BC (nằm cùng phía với A đối với BC).



Hình 147

14. (h. 148). Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là giao điểm của cung chứa góc $90^\circ + 60^\circ : 2 = 120^\circ$ dựng trên BC và đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng bằng 1cm.



Hình 148

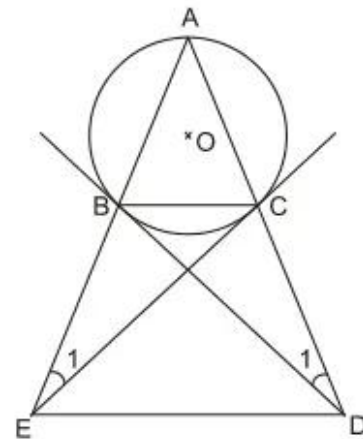
15. (h. 149)

a) $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow BD^2 = AD \cdot CD.$$

b) Dùng định lý về góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, ta chứng minh được $\widehat{E}_1 = \widehat{D}_1$. Từ đó suy ra tứ giác BCDE nội tiếp.

c) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$ (cùng bù với \widehat{BCD}).



Hình 149

16. (h.150)

Xét hai trường hợp :

a) Đường cao hình trụ bằng 3 cm. Khi đó $R = 1$ cm (h.150a).

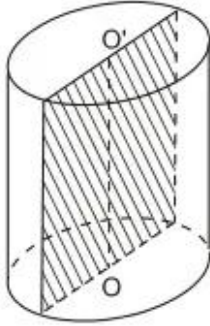
$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

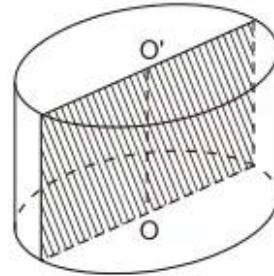
b) Đường cao hình trụ bằng 2 cm. Khi đó $R = 1,5$ cm (h. 150b).

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 2 = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 2 = 4,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



a)



b)

Hình 150

17. (h. 151)

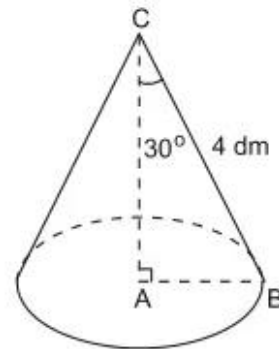
Trong tam giác vuông ABC, ta có :

$$AB = BC \sin C = BC \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ (dm)},$$

$$AC = BC \cos C = BC \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (dm)},$$

$$S_{xq} = \pi R l = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi \text{ (dm}^2\text{)},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}.$$



Hình 151

18. Gọi R là bán kính hình cầu (đơn vị : m). Ta có

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{R}{3} = 1 \Rightarrow R = 3 \text{ (m)},$$

$$S = 36\pi \text{ (m}^2\text{)}, \quad V = 36\pi \text{ (m}^3\text{)}.$$