

§9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

Khi nào giá trị của phân thức được xác định ?

1. Biểu thức hữu tỉ

Đến bây giờ ta đã biết rằng trong tập hợp các phân thức đại số có các phép toán : cộng, trừ, nhân, chia. Quan sát các biểu thức sau :

$$0, -\frac{2}{5}, \sqrt{7}, 2x^2 - \sqrt{5}x + \frac{1}{3}, (6x + 1)(x - 2),$$

$$\frac{x}{3x^2 + 1}, 4x + \frac{1}{x + 3}, \frac{\frac{2x}{x-1} + 2}{\frac{3}{x^2 - 1}}.$$

Mỗi biểu thức trên đây là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán : cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức. Ta gọi những biểu thức như thế là những *biểu thức hữu tỉ*.

Biểu thức $\frac{\frac{2x}{x-1} + 2}{\frac{3}{x^2 - 1}}$ biểu thị phép chia tổng $\frac{2x}{x-1} + 2$ cho $\frac{3}{x^2 - 1}$.

2. Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức

Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

Ví dụ 1. Biến đổi biểu thức $A = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$ thành một phân thức.

$$\begin{aligned} \text{Giải. } A &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x^2-1}{x} = \\ &= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{(x+1) \cdot x}{x \cdot (x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

?1 *Biến đổi biểu thức*

$$B = \frac{1 + \frac{2}{x-1}}{1 + \frac{2x}{x^2+1}}$$

thành một phân thức.

3. Giá trị của phân thức

Khi làm tính trên các phân thức ta chỉ việc thực hiện theo các quy tắc của các phép toán, không cần quan tâm đến giá trị của biến. Nhưng khi làm những bài toán liên quan đến giá trị của phân thức thì *trước hết phải tìm điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0*. Đó chính là *điều kiện để giá trị của phân thức được xác định*. Nếu tại giá trị của biến mà giá trị của một phân thức được xác định thì phân thức ấy và phân thức rút gọn của nó có cùng một giá trị.

Ví dụ 2. Cho phân thức $\frac{3x-9}{x(x-3)}$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức $\frac{3x-9}{x(x-3)}$ được xác định ;

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 2004$.

Giải

a) Giá trị của phân thức này được xác định với điều kiện $x(x-3) \neq 0$. Nhưng một tích (của nhiều số) khác 0 khi mọi thừa số đều khác 0. Do đó $x \neq 0$ và $x-3 \neq 0$. Vậy điều kiện để giá trị của phân thức $\frac{3x-9}{x(x-3)}$ được xác định là :

$x \neq 0$ và $x \neq 3$.

b) Vì $\frac{3x-9}{x(x-3)} = \frac{3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{3}{x}$ và $x = 2004$ thoả mãn điều kiện của biến nên có thể tính giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn $\frac{3}{x}$. Vậy giá trị của phân thức đã cho bằng $\frac{3}{2004} = \frac{1}{668}$.

22 Cho phân thức $\frac{x+1}{x^2+x}$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 1\,000\,000$ và tại $x = -1$.

BÀI TẬP

46. Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số :

a) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$;

b) $\frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2-2}{x^2-1}}$.

47. Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi phân thức sau được xác định ?

a) $\frac{5x}{2x+4}$;

b) $\frac{x-1}{x^2-1}$.

48. Cho phân thức $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$.
- Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?
 - Rút gọn phân thức.
 - Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1.
 - Có giá trị nào của x để giá trị của phân thức bằng 0 hay không ?
49. **Đố.** Đố em tìm được một phân thức (của một biến x) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của x khác các ước của 2.

LUYỆN TẬP

50. Thực hiện các phép tính :

$$\text{a) } \left(\frac{x}{x+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right); \quad \text{b) } (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right).$$

51. Làm các phép tính sau :

$$\text{a) } \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right).$$

52. Chứng tỏ rằng với $x \neq 0$ và $x \neq \pm a$ (a là một số nguyên), giá trị của biểu thức

$$\left(a - \frac{x^2 + a^2}{x + a} \right) \cdot \left(\frac{2a}{x} - \frac{4a}{x - a} \right)$$

là một số chẵn.

53. a) Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số :

$$1 + \frac{1}{x};$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}};$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}};$$

b) Em hãy dự đoán kết quả của phép biến đổi biểu thức $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$

thành phân thức đại số và kiểm tra lại dự đoán đó.

54. Tìm các giá trị của x để giá trị của các phân thức sau được xác định :

a) $\frac{3x+2}{2x^2-6x}$;

b) $\frac{5}{x^2-3}$.

55. Cho phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Chứng tỏ phân thức rút gọn của phân thức đã cho là $\frac{x+1}{x-1}$.

c) Để tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = 2$ và tại $x = -1$, bạn Thắng đã làm như sau :

- Với $x = 2$, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{2+1}{2-1} = 3$;

- Với $x = -1$, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{-1+1}{-1-1} = 0$.

Em có đồng ý không ? Nếu không, em hãy chỉ ra chỗ mà em cho là sai.

Theo em, với những giá trị nào của biến thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn ?

56. Cho phân thức $\frac{3x^2+6x+12}{x^3-8}$.

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức.

c) Em có biết trên 1cm^2 bề mặt da của em có bao nhiêu con vi khuẩn không ?

Tính giá trị của biểu thức đã cho tại $x = \frac{4001}{2000}$ em sẽ tìm được câu trả lời

thật đáng sợ. (Tuy nhiên trong số đó chỉ có 20% là vi khuẩn có hại).