

§5. Phép cộng các phân thức đại số



1. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Quy tắc cộng hai phân thức cũng tương tự như quy tắc cộng hai phân số.

Quy tắc

Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

Ví dụ 1. Cộng hai phân thức : $\frac{x^2}{3x+6} + \frac{4x+4}{3x+6}$.

Giải. $\frac{x^2}{3x+6} + \frac{4x+4}{3x+6} = \frac{x^2+4x+4}{3x+6} = \frac{(x+2)^2}{3(x+2)} = \frac{x+2}{3}$.

?1 Thực hiện phép cộng : $\frac{3x+1}{7x^2y} + \frac{2x+2}{7x^2y}$.

2. Cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau

Ta đã biết quy đồng mẫu thức hai phân thức và quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức. Có thể áp dụng những điều đó để cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau.

?2 Thực hiện phép cộng : $\frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8}$.

Ta có quy tắc cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau như sau :

Quy tắc

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Kết quả của phép cộng hai phân thức được gọi là *tổng* của hai phân thức ấy. Ta thường viết tổng này dưới dạng rút gọn.

Có thể trình bày một phép cộng phân thức như ví dụ sau.

Ví dụ 2. Làm tính cộng : $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}$.

Giải. $2x-2 = 2(x-1)$; $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

$$\text{MTC} = 2(x-1)(x+1).$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1} &= \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} + \frac{2 \cdot (-2x)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

?3 Thực hiện phép cộng : $\frac{y-12}{6y-36} + \frac{6}{y^2-6y}$.

► **Chú ý.** Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất sau :

1) *Giao hoán* : $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$;

2) *Kết hợp* : $\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right)$.

Nhờ tính chất kết hợp, trong một dãy phép cộng nhiều phân thức, ta không cần đặt dấu ngoặc.

- 24** Áp dụng các tính chất trên đây của phép cộng các phân thức để làm phép tính sau :

$$\frac{2x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{x^2 + 4x + 4}$$

BÀI TẬP

21. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{3x-5}{7} + \frac{4x+5}{7}$;

b) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3}$;

c) $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}$.

22. Áp dụng quy tắc đổi dấu để các phân thức có cùng mẫu thức rồi làm tính cộng phân thức :

a) $\frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1}$;

b) $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$.

23. Làm các phép tính sau :

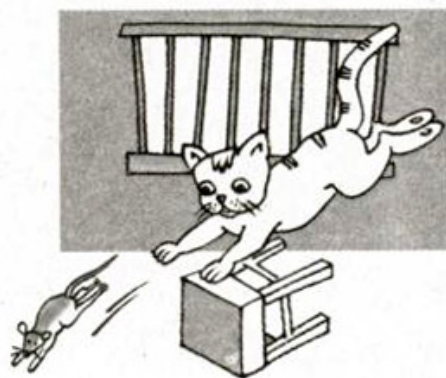
a) $\frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy}$;

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)}$;

c) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$;

d) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$.

24. Một con mèo đuổi bắt một con chuột. Lần đầu mèo chạy với vận tốc x m/s. Chạy được 3m thì mèo bắt được chuột. Mèo vờn chuột 40 giây rồi thả cho chuột chạy. Sau đó 15 giây mèo lại đuổi bắt, nhưng với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lần đầu là 0,5m/s. Chạy được 5m mèo lại bắt được chuột. Lần này thì mèo cắn chết chuột. Cuộc săn đuổi kết thúc.



Hãy biểu diễn qua x :

- Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột ;
- Thời gian lần thứ hai mèo đuổi bắt được chuột ;
- Thời gian kể từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn.



Có thể em chưa biết

Kết quả của các bài tập 23 c), d) đều là $\frac{4}{4x+7}$. Nếu cho x một giá trị là một số tự nhiên bất kì thì bài toán cho ta cách biểu diễn một phân số tương ứng dưới dạng tổng của không quá ba phân số Ai Cập (tức là phân số với tử số bằng 1; xem Toán 6, Tập hai, trang 7). Chẳng hạn, với $x = 2$, dùng bài tập 23 c), ta có cách biểu diễn của phân số $\frac{4}{15}$ là $\frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{60}$, dùng bài tập 23 d) ta có: $\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}$.

Nhà toán học Éc-đốt (P. Erdős) đã nêu lên một bài toán tổng quát như sau: "Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 4$, phân số $\frac{4}{n}$ bằng tổng của ba phân số Ai Cập khác nhau".

Đến nay vẫn chưa có lời giải cho bài toán này.

Éc-đốt sinh năm 1913 tại Hung-ga-ri và mất vào năm 1996. Ông có nhiều công trình toán học nổi tiếng và đã nhận được nhiều giải thưởng quốc tế. Ông đã dùng phần lớn số tiền thưởng của mình để giúp đỡ sinh viên học tập.

LUYỆN TẬP

25. Làm tính cộng các phân thức sau:

a) $\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3}$;

b) $\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$;

c) $\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x}$;

d) $x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1$;

e) $\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x}$.

26. Một đội máy xúc trên công trường đường Hồ Chí Minh nhận nhiệm vụ xúc 11600m^3 đất. Giai đoạn đầu còn nhiều khó khăn nên máy làm việc với năng suất trung bình $x\text{m}^3/\text{ngày}$ và đội đào được 5000m^3 . Sau đó công việc ổn định hơn, năng suất của máy tăng $25\text{m}^3/\text{ngày}$.



a) Hãy biểu diễn :

- Thời gian xúc 5000m^3 đầu tiên ;
- Thời gian làm nốt phần việc còn lại ;
- Thời gian làm việc để hoàn thành công việc.

b) Tính thời gian làm việc để hoàn thành công việc với $x = 250\text{m}^3/\text{ngày}$.

27. **Đố.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$\frac{x^2}{5x + 25} + \frac{2(x - 5)}{x} + \frac{50 + 5x}{x(x + 5)}$$

tại $x = -4$.

Nếu coi tử số của phân số tối giản mà em tìm được là ngày còn mẫu số là tháng thì đó chính là một ngày lễ trên thế giới. Đố em biết đó là ngày gì ?