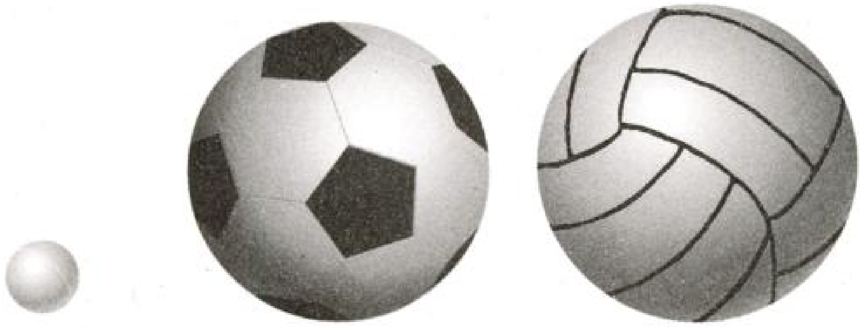
§1 MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu



Các quả bóng như bóng bàn, bóng đá, bóng chuyền cho ta hình ảnh của một hình trong không gian mà ta sẽ gọi là *mặt cầu*. Định nghĩa của mặt cầu cũng đơn giản như định nghĩa quen thuộc của đường tròn trong hình học phẳng.

ĐỊNH NGHĨA

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là ***mặt cầu*** *có tâm là O và bán kính bằng R.*

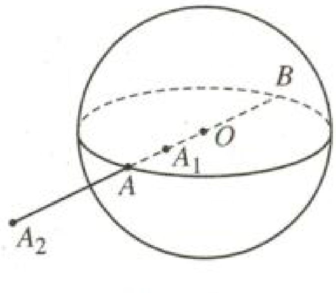
Mặt cầu như thế thường được kí hiệu là $S(O\,;R)$. Như vậy :

$$S(O\,;R)=\{M \mid OM=R\}.$$

Các thuật ngữ

Cho mặt cầu $S(O\,;R)$ và một điểm A nào đó (h.32).

a) Nếu $OA=R$ thì theo định nghĩa, điểm A thuộc mặt cầu. Khi đó đoạn thẳng OA cũng được gọi là *bán kính* của mặt cầu.



Hình 32

Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB được gọi là *đường kính* của mặt cầu. Như vậy, một mặt cầu được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc khi biết một đường kính AB của nó.

b) Nếu $OA < R$ thì ta nói rằng điểm A *nằm trong* mặt cầu.

c) Nếu $OA > R$ thì ta nói rằng điểm A *nằm ngoài* mặt cầu.

Trên hình 32, ta có điểm A nằm trên mặt cầu, AB là đường kính, điểm A_1 nằm trong mặt cầu và điểm A_2 nằm ngoài mặt cầu.

d) Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là *khối cầu* $S(O\ ;\ R)$ hoặc *hình cầu* $S(O\ ;\ R)$. Như vậy, khối cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp các điểm M sao cho $OM \leq R$.

Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Cho hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho* $\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = 0$ *là mặt cầu đường kính AB.*

Giải. Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - IA^2.$$

Suy ra $\quad \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = IA = IB.$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm I bán kính $R = IA$, tức là mặt cầu đường kính AB. ■

Ví dụ 2. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2.$$

1 (để giải ví dụ 2)

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2.$$

a) Hãy tính toán tiếp để đi đến kết quả :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2.$$

b) Hãy kết hợp kết quả trên với đẳng thức đã cho trong bài toán để tìm giá trị của MG.

c) Phát biểu kết quả của bài toán.

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

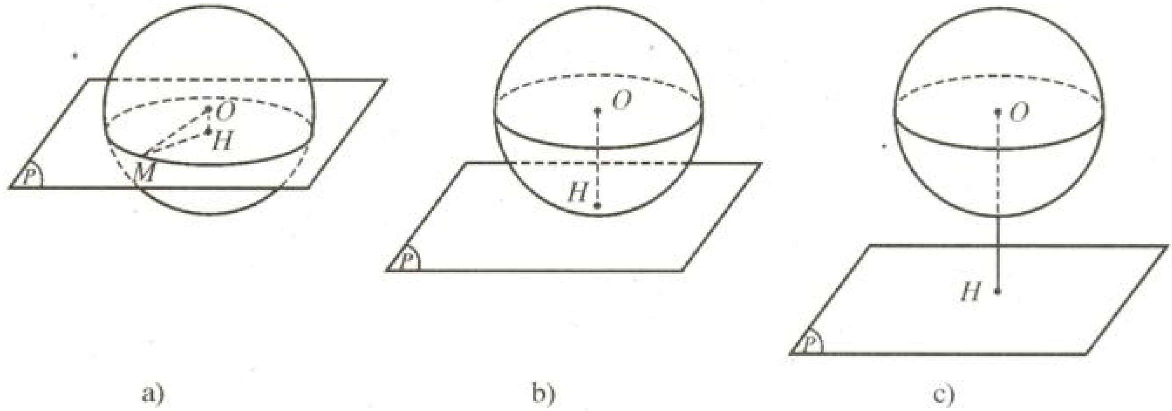
Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mặt phẳng (P). Hiển nhiên mặt phẳng có thể cắt hoặc không cắt mặt cầu. Nếu mặt cầu ở cách mặt phẳng quá xa thì rõ ràng là chúng không cắt nhau. Độ xa, gần của mặt cầu và mặt phẳng phụ thuộc vào bán kính R của mặt cầu và khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu tới mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của O trên mp(P) thì $d = OH$.

2

Hãy chứng tỏ rằng điểm M là điểm chung của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp(P) khi và chỉ khi $M \in (P)$ và $HM^2 = R^2 - d^2$ (h.33a).

3

Từ Hoạt động 2, có thể kết luận gì về giao của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp(P) trong các trường hợp : a) $d < R$; b) $d = R$; c) $d > R$?



Hình 33

Tóm lại, ta có kết luận :

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó :

- *Nếu $d < R$ thì mp(P) cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (h.33a) ;*
- *Nếu $d = R$ thì mp(P) cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất H (h.33b) ;*
- *Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ (h.33c).*

Khi $d = 0$ thì mp(P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó được gọi là *mặt phẳng kính* ; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có bán kính R, đường tròn đó gọi là *đường tròn lớn* của mặt cầu.

Trong trường hợp $d = R$, mp(P) và mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ có điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H, hoặc còn nói mp(P) là *tiếp diện* của mặt cầu tại điểm H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* (hoặc *tiếp điểm*) của (P) và mặt cầu.

?1 *Mệnh đề sau đây có đúng không : Điều kiện cần và đủ để mp(P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ tại điểm H là mp(P) vuông góc với bán kính OH tại điểm H ?*

Bài toán 1

Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện $\mathcal{H}$ gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $\mathcal{H}$ và hình đa diện $\mathcal{H}$ gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Chứng minh rằng hình chóp nội tiếp một mặt cầu khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác nội tiếp một đường tròn.

4 (để giải bài toán 1)

a) Nếu hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ nội tiếp một mặt cầu thì vì sao có thể kết luận rằng đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ nội tiếp một đường tròn ? Đó là đường tròn nào ?

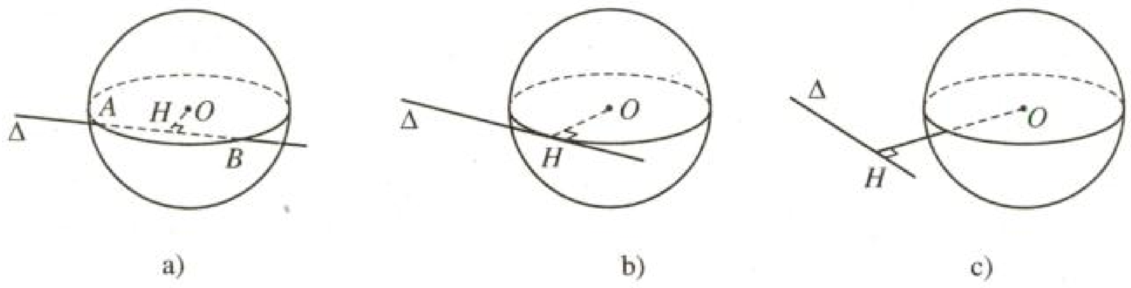
b) Cho hình chóp có đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn tâm I. Hãy xác định điểm O cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp. Từ đó suy ra hình chóp nội tiếp một mặt cầu.

?2 *Tại sao có thể nói : Hình tứ diện nào cũng có mặt cầu ngoại tiếp ?*

?3 *Hình lăng trụ tam giác có cạnh bên không vuông góc với đáy có thể nội tiếp một mặt cầu không ? Vì sao ?*

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O tới Δ. Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có các kết luận sau đây (h.34) :



Hình 34

- *Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt (h.34a) ;*
- *Nếu $d = R$ thì Δ cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất (h.34b) ;*
- *Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu (h.34c).*

Trong trường hợp $d = R$, đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ có điểm chung duy nhất là H. Khi đó, ta nói đường thẳng Δ *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H hoặc còn nói Δ là *tiếp tuyến* của mặt cầu tại H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* (hoặc *tiếp điểm*) của Δ và mặt cầu.

?4 *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?*

a) *Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H ;*

b) *Có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ tại điểm H, chúng nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.*

Bài toán 2. *Hãy chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của một tứ diện đều ABCD cho trước.*

5 (để giải bài toán 2)

Gọi O là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$. Hãy chứng minh rằng khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện đó đều bằng nhau.

?5 *Đường thẳng đi qua điểm A nằm trong mặt cầu có tiếp xúc với mặt cầu hay không ?*

Trong trường hợp điểm A nằm ngoài mặt cầu, ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ

Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O ; R) thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó

a) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

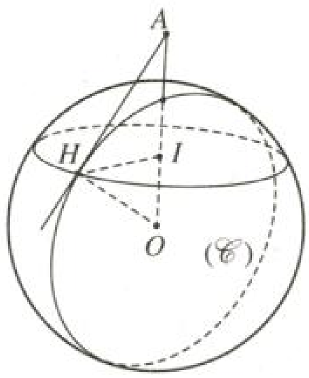
b) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

6 (để chứng minh định lí)

Lấy một mặt phẳng bất kì đi qua AO, nó cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ theo một đường tròn $(\mathscr{C})$ (h.35). Gọi AH là một tiếp tuyến của đường tròn đó tại H. Chứng minh rằng AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

a) Tính độ dài đoạn AH theo R và $d = OA$.

b) Kẻ HI vuông góc với OA tại I rồi chứng minh rằng I là điểm cố định không phụ thuộc vào tiếp tuyến AH. Từ đó suy ra kết luận b) trong định lí.



Hình 35

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Ta đã biết thế nào là diện tích của các đa giác phẳng. Ta định nghĩa *diện tích của hình đa diện* là tổng diện tích các mặt của nó.

Tuy mặt cầu không giống như hình đa diện vì nó không phải là hợp của các đa giác, nhưng hiển nhiên là nó cũng phải có một "diện tích" nào đó. Nếu để sơn một mặt cầu, ta phải dùng 1kg sơn và cũng với 1kg sơn loại đó, ta có thể sơn được một hình chữ nhật (với độ mỏng của lớp sơn như nhau) thì có thể xem diện tích của mặt cầu bằng diện tích hình chữ nhật.

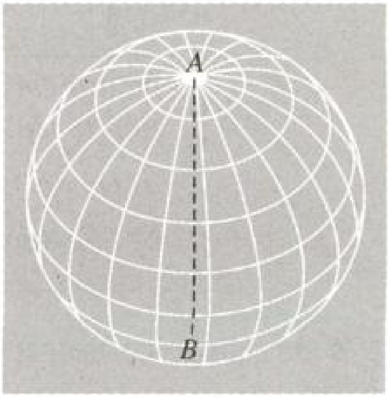
Sau đây ta nêu ra cách định nghĩa diện tích của mặt cầu và nói rõ hơn về công thức tính diện tích đó. Cũng tương tự như vậy đối với thể tích của khối cầu.

Khái niệm về diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu đường kính AB (h.36).

Mỗi nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB cắt mặt cầu theo một nửa đường tròn đường kính AB. Ta gọi các nửa đường tròn đó là các *kinh tuyến* ứng với đường kính AB.

Mỗi mặt phẳng vuông góc với AB nếu cắt mặt cầu theo một đường tròn thì đường tròn đó gọi là *vĩ tuyến* ứng với đường kính AB.



Hình 36

Nếu xem bề mặt Trái Đất là một mặt cầu có cực bắc là A, cực nam là B thì các kinh tuyến, vĩ tuyến nói trên chính là các kinh tuyến, vĩ tuyến của Trái Đất.

Chúng ta hãy lấy một số kinh tuyến và vĩ tuyến ứng với đường kính AB của mặt cầu. Chúng sẽ chia mặt cầu thành nhiều mảnh, có thể gọi mỗi mảnh đó là một "tứ giác cầu" (đặc biệt có thể là "tam giác cầu"). Ta có thể thấy rằng bốn đỉnh của một "tứ giác cầu" nằm trên một mặt phẳng, và do đó cũng là bốn đỉnh của một tứ giác phẳng (đúng ra là hình thang cân) mà ta sẽ gọi là "xấp xỉ phẳng" của tứ giác cầu đang xét. Tương tự, mỗi "tam giác cầu" cũng có "xấp xỉ phẳng" là một tam giác cân. Tập hợp các "xấp xỉ phẳng" của tứ giác cầu và tam giác cầu làm thành một hình đa diện $\mathcal{D}$ nội tiếp mặt cầu. Hình đa diện $\mathcal{D}$ gọi là *đa diện xấp xỉ* của mặt cầu.

Người ta chứng minh được rằng :

1) *Khi độ dài các cạnh của $\mathcal{D}$ tiến tới* 0 *thì diện tích của hình đa diện $\mathcal{D}$ tiến tới một giới hạn xác định.* Giới hạn đó được gọi là *diện tích* của mặt cầu.

2) *Khi độ dài các cạnh của $\mathcal{D}$ tiến tới* 0 *thì thể tích của khối đa diện $\mathcal{D}$ tiến tới một giới hạn xác định.* Giới hạn đó được gọi là *thể tích* của khối cầu.

Các công thức

Dựa vào định nghĩa trên và dùng phương pháp giới hạn, người ta chứng minh được các công thức về diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu như sau :

Mặt cầu bán kính R có diện tích là : $S = 4\pi R^2$.

Khối cầu bán kính R có thể tích là : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AB$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Tính bán kính mặt cầu đó nếu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

2. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước.

b) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước.

c) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước.

d) Có hay không một mặt cầu đi qua một đường tròn và một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn ?

3. Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Mọi mặt phẳng đi qua M đều cắt (S) theo một đường tròn ;

b) Mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

4. Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.

5. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Nếu hình đa diện nội tiếp mặt cầu thì mọi mặt của nó là đa giác nội tiếp đường tròn ;

b) Nếu tất cả các mặt của một hình đa diện nội tiếp đường tròn thì đa diện đó nội tiếp mặt cầu.

6. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

b) Chứng minh rằng nếu có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ diện $ABCD$ thì

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

7. a) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm $A, B, C, D, A', B', C', D'$ cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

8. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của hình tứ diện (nó được gọi là mặt cầu *nội tiếp* tứ diện).

9. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ biết rằng $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng điểm S, trọng tâm tam giác ABC và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thẳng hàng.

10. a) Chứng minh rằng một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó là hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.

b) Trong số các hình hộp nội tiếp mặt cầu cho trước, hình hộp nào có diện tích toàn phần lớn nhất ?