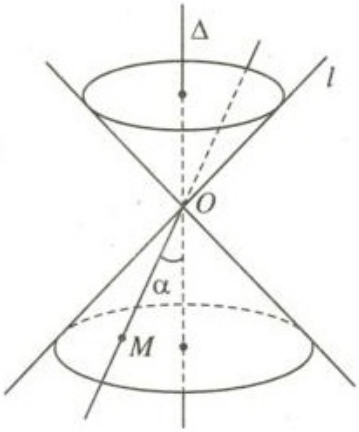
# §4 MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

## 1. Định nghĩa mặt nón

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng $l$ cắt Δ tại $O$ và không vuông góc với Δ (h. 49).

> *Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng $l$ như thế khi quay quanh Δ gọi là* ***mặt nón tròn xoay*** *(hay đơn giản là* ***mặt nón****).*



*Hình 49*

Δ gọi là *trục* của mặt nón.

$l$ gọi là *đường sinh* của mặt nón.

$O$ gọi là *đỉnh* của mặt nón.

Nếu gọi $\alpha$ là góc giữa $l$ và Δ thì $2\alpha$ gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón ($0^o < 2\alpha < 180^o$).

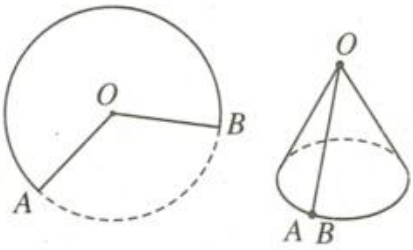
Chúng ta dễ dàng nhận thấy :

Nếu $M$ là một điểm tuỳ ý của mặt nón $\mathfrak{N}$ khác với điểm $O$ thì đường thẳng $OM$ nằm hoàn toàn trên mặt nón đó. Có thể xem mặt nón $\mathfrak{N}$ sinh bởi đường thẳng $OM$ khi quay quanh Δ. Bởi thế, $OM$ cũng được gọi là đường sinh của mặt nón đó.

## Em hãy làm thử !

Các em hãy lấy một miếng bìa, cắt thành hình quạt tròn giới hạn bởi một cung tròn $AB$ và hai bán kính $OA$, $OB$ (h.50). Ta uốn cong hình quạt tròn đó để có thể dán hai bán kính $OA$ và $OB$ với nhau.

Sau khi dán, cung tròn $AB$ trở thành một đường khép kín. Nếu ta làm cho đường khép kín này trở thành một đường tròn thì ta được một phần của mặt nón tròn xoay.



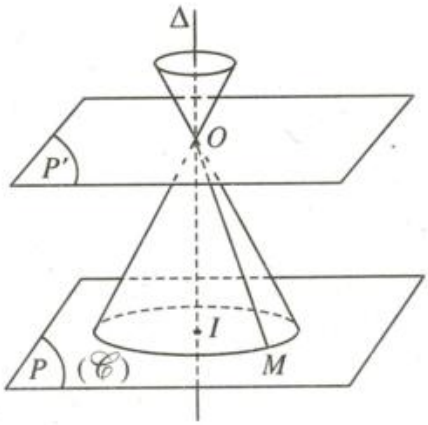

*Hình 50*

?1 *a) Giao của một mặt nón và một mặt phẳng đi qua trục của nó là hình gì ?*

*b) Giao của một mặt nón và một mặt phẳng vuông góc với trục của nó là hình gì ?*

### 2. Hình nón và khối nón

Cho mặt nón $\mathfrak{N}$ với trục $\Delta$, đỉnh $O$ và góc ở đỉnh $2\alpha$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng vuông góc với $\Delta$ tại điểm $I$ khác $O$ (h.51). Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt nón theo đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I$. Lại gọi $(P')$ là mặt phẳng vuông góc với $\Delta$ tại $O$. Khi đó




*Hình 51*

> *Phần của mặt nón $\mathfrak{N}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $(P)$ và $(P')$ cùng với hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ được gọi là* ***hình nón***.

Điểm $O$ gọi là *đỉnh* của hình nón, đường tròn $(\mathscr{C})$ gọi là *đường tròn đáy*, hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ gọi là *đáy* của hình nón. Với mỗi điểm $M$ nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$, đoạn thẳng $OM$ gọi là *đường sinh* của hình nón ; rõ ràng là các đường sinh của hình nón có độ dài bằng nhau. Đoạn thẳng $OI$ gọi là *trục* của hình nón, độ dài $OI$ gọi là *chiều cao* của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh $O$ tới mặt đáy).

?2 *Giao của một hình nón và một mặt phẳng đi qua trục của nó là hình gì ?*

Hiển nhiên là một hình nón chia không gian thành hai phần : phần bên trong và phần bên ngoài của nó.

> *Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là* ***khối nón****.*

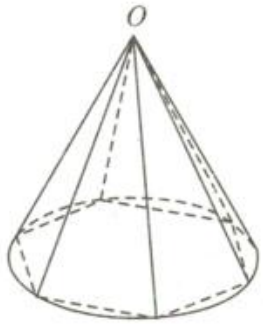
## 3. Khái niệm về diện tích hình nón và thể tích khối nón

Một hình chóp gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh hình nón.

Ta có định nghĩa :

> ***Diện tích xung quanh*** *của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*
>
> ***Thể tích*** *của khối nón (còn gọi là thể tích của hình nón) là giới hạn của thể tích của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

Giả sử $\mathscr{H}$ là một hình chóp đều nội tiếp hình nón $\mathfrak{N}$ (h.52). Gọi $p$ là chu vi đáy của hình chóp đều $\mathscr{H}$, và $q$ là khoảng cách từ $O$ tới một cạnh đáy của $\mathscr{H}$ thì diện tích xung quanh của $\mathscr{H}$ là $S_{xq} = \frac{1}{2}p.q$. Khi cho số cạnh đáy của $\mathscr{H}$ tăng lên vô hạn thì $p$ có giới hạn là độ dài đường tròn đáy của hình nón $\mathfrak{N}$, còn $q$ có giới hạn là độ dài đường sinh của hình nón. Vậy :




*Hình 52*

> *Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

Cũng chú ý rằng thể tích $V$ của khối chóp $\mathscr{H}$ bằng $\frac{1}{3}$ tích số của diện tích đa giác đáy và chiều cao của $\mathscr{H}$ (cũng là chiều cao của khối nón). Khi số cạnh đáy của $\mathscr{H}$ tăng lên vô hạn thì diện tích đa giác đáy của $\mathscr{H}$ có giới hạn là diện tích hình tròn đáy của khối nón $\mathfrak{N}$. Bởi vậy :

*Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số diện tích hình tròn đáy và chiều cao.*

**Ví dụ.** *Cắt một hình nón $\mathcal{N}$ bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần (tức là tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy) và thể tích của khối nón $\mathcal{N}$.*

***Giải***

Giả sử thiết diện là tam giác đều $OAB$ cạnh $2a$, khi đó hình nón đã cho có bán kính đáy là $a$ và độ dài đường sinh là $2a$ (h.53). Vậy diện tích xung quanh của nó là

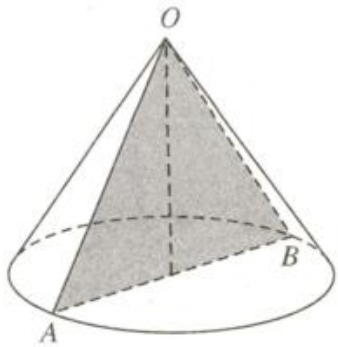
$$S_{xq} = \frac{1}{2}2\pi a.2a = 2\pi a^2.$$

Diện tích toàn phần là

$$S_{tp} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Thể tích là

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}. \quad \blacksquare$$




*Hình 53*

# Bài đọc thêm

## GIAO TUYẾN PARABOL CỦA MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ MẶT PHẲNG

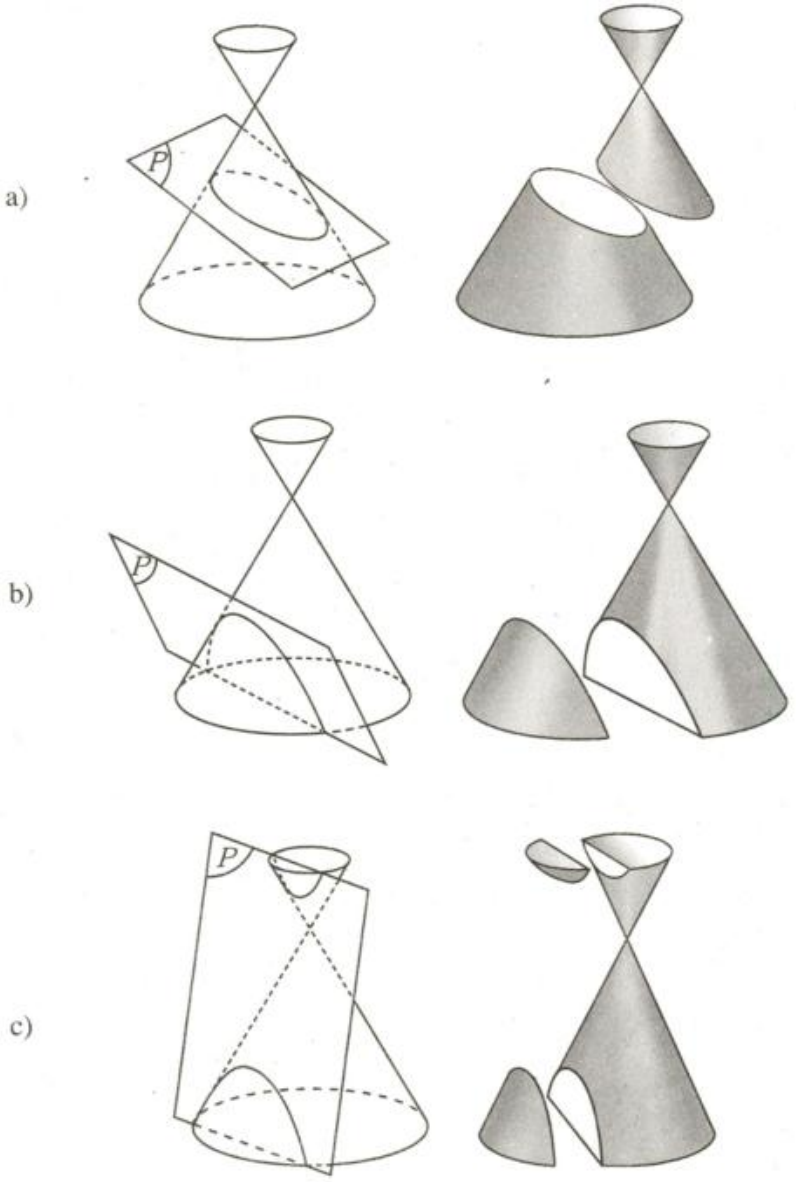
Ở lớp 10, chúng ta đã biết ba đường cônic là elip, hypebol, parabol. Người ta chứng minh được rằng :

*Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là :*

*a) Một đường elip nếu mp(P) cắt mọi đường sinh (đặc biệt, nếu (P) vuông góc với trục của mặt nón thì giao là đường tròn) (h.54a) ;*

*b) Một đường parabol nếu mp(P) song song với chỉ một đường sinh (h.54b) ;*

*c) Một đường hypebol nếu mp(P) song song với hai đường sinh (h.54c).*




*Hình 54*

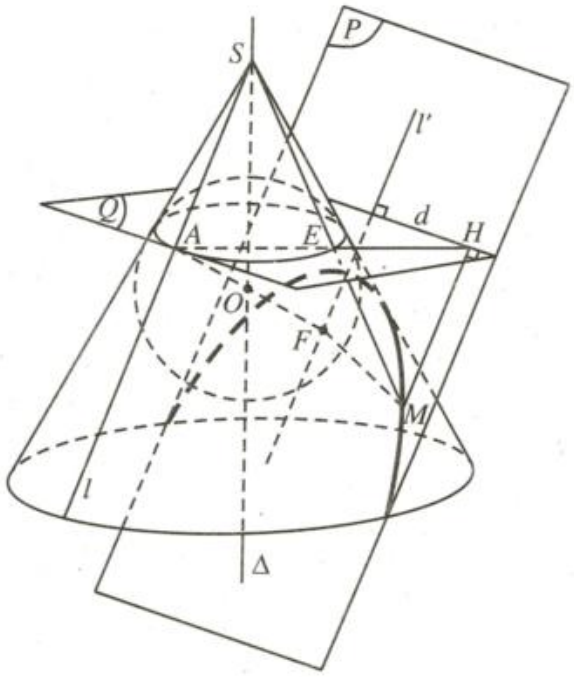
Sau đây ta giới thiệu một cách chứng minh cho trường hợp b).

Xét mặt nón tròn xoay $\mathfrak{N}$ trục $\Delta$, đỉnh $S$.

Giả sử $(P)$ là mặt phẳng song song với đúng một đường sinh $l$ của $\mathfrak{N}$. Ta chứng minh giao của $\mathfrak{N}$ và $(P)$ là một parabol (h.55).

Gọi $l'$ là giao tuyến của mp($l$, $\Delta$) và ($P$) thì $l' \parallel l$. Trong mặt phẳng $(l, \Delta)$, lấy điểm $O \in \Delta$ cách đều $l$, $l'$ và gọi $\mathscr{S}$ là mặt cầu tâm $O$ tiếp xúc với $l$ và $l'$ (theo thứ tự tại $A$ và $F$). Khi đó, $\mathscr{S}$ tiếp xúc với mọi đường sinh của mặt nón $\mathfrak{N}$ và các tiếp điểm nằm trên một đường tròn ($\mathscr{C}$) chứa $A$.

Gọi ($P'$) là mặt phẳng chứa $l$ và song song với ($P$) thì ($P'$) có chung với $\mathfrak{N}$ đúng một đường thẳng là $l$ nên ($P'$) chứa tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại $A$. Suy ra ($P'$) tiếp xúc với $\mathscr{S}$ tại $A$ và ($P$) tiếp xúc với $\mathscr{S}$ tại $F$.



*Hình 55*

Mặt phẳng ($Q$) chứa ($\mathscr{C}$) cắt ($P'$) theo tiếp tuyến vừa nói nên cắt ($P$) theo đường thẳng $d$ song song với tiếp tuyến đó ; suy ra $d$ vuông góc với $l'$.

Với $M$ là một điểm tuỳ ý thuộc $\mathfrak{N} \cap (P)$, kẻ $MH$ vuông góc với $d$ thì $MH$ cùng phương với $l'$ nên song song với $l$. Gọi $E$ là giao điểm của $SM$ và ($\mathscr{C}$) thì $E \in (Q)$, ba điểm $A$, $E$, $H$ thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của ($Q$) với mp($M$, $l$). Từ $SA = SE$ suy ra $MH = ME$, mà $ME = MF$ (vì chúng là hai đoạn tiếp tuyến của $\mathscr{S}$ kẻ từ $M$) nên $MF = MH$. Điều này chứng tỏ rằng giao của mặt nón $\mathfrak{N}$ với mp($P$) là parabol với tiêu điểm $F$ và đường chuẩn $d$.

## Câu hỏi và bài tập

**17.** Trong mỗi trường hợp sau, hãy gọi tên hình tròn xoay :

a) Sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó ;

b) Sinh bởi một tam giác vuông (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

**18.** Cho điểm $A$ nằm ngoài mặt cầu ($S$). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua $A$ tiếp xúc với mặt cầu ($S$) luôn nằm trên một mặt nón xác định.

**19.** Một mặt cầu gọi là *ngoại tiếp* một hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là *nội tiếp* mặt cầu đó.

a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có một mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao $h$ và bán kính đáy bằng $r$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

c) Cho một hình nón nội tiếp một mặt cầu bán kính $R$. Nếu hình nón đó có chiều cao bằng $h$ thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu ? Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

**20.** Một mặt cầu gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó, hình nón được gọi là *ngoại tiếp* mặt cầu.

a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có một mặt cầu nội tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao bằng $h$ và bán kính đáy bằng $r$. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón đó.

**21.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AB = c$, $AC = b$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng $BC$.