§3 PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Phép vị tự trong không gian

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *gọi là* ***phép vị tự***. *Điểm O gọi là* ***tâm vị tự***, *số k gọi là* ***tỉ số vị tự***.

Như vậy, phép vị tự trong không gian được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng. Các tính chất sau đây của phép vị tự đều có thể được chứng minh tương tự như trong mặt phẳng.

Các tính chất cơ bản của phép vị tự

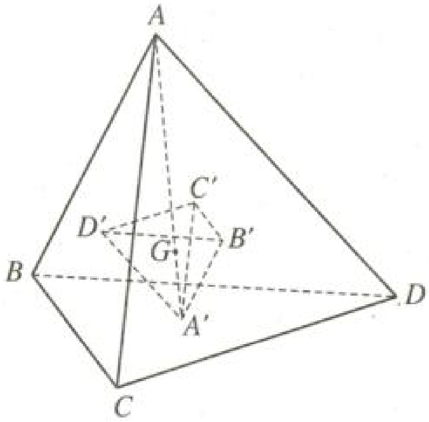
1. Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, *và do đó* $M'N' = |k|MN$.

2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

Từ đó suy ra phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng...

Ví dụ 1

Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng có phép vị tự biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D'.



Hình 19

Giải (h.19)

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Khi đó ta biết rằng :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB},$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}.$$

Suy ra phép vị tự V tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Vậy V biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$. ■

$\boxed{?1}$ *Trong trường hợp nào thì phép vị tự là một phép dời hình ?*

2. Hai hình đồng dạng

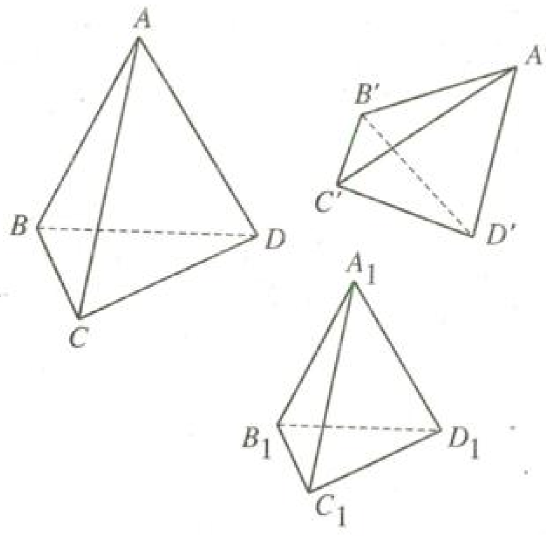
ĐỊNH NGHĨA 2

*Hình $\mathcal{H}$ được gọi là **đồng dạng** với hình $\mathcal{H}'$ nếu có một phép vị tự biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}_1$ mà hình $\mathcal{H}_1$ bằng hình $\mathcal{H}'$.*

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng hai hình tứ diện đều bất kì luôn luôn đồng dạng với nhau.*

Chứng minh (h.20)

Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a và $A'B'C'D'$ là tứ diện đều có cạnh bằng a'. Ta xét phép vị tự V có tâm O tùy ý và có tỉ số $k = \frac{a'}{a}$. Khi đó dễ thấy tứ diện đều $ABCD$ biến thành tứ diện đều $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a'. Vậy tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng tứ diện $A'B'C'D'$. Theo định nghĩa, tứ diện $ABCD$ đồng dạng với tứ diện $A'B'C'D'$. ■



Hình 20

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng hai hình lập phương bất kì đều đồng dạng với nhau.*

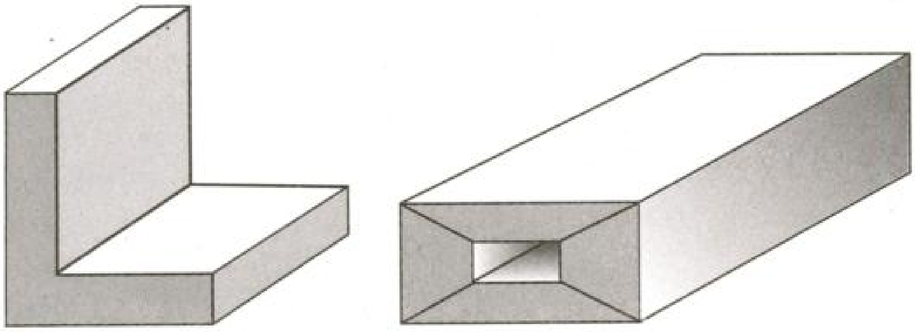
Chứng minh tương tự như ở Ví dụ 2.

3. Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

Trước hết ta nói về *khối đa diện lồi*, một khái niệm tương tự như khái niệm đa giác lồi trong hình học phẳng.

Một khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn thẳng AB cũng thuộc khối đó.

Các khối đa diện trên hình 21 không phải là những khối đa diện lồi.



Hình 21

?2 *Tại sao các khối đa diện trên hình 21 không phải là những khối đa diện lồi ?*

Chúng ta đã biết thế nào là đa giác đều. Bây giờ ta sẽ định nghĩa thế nào là khối đa diện đều.

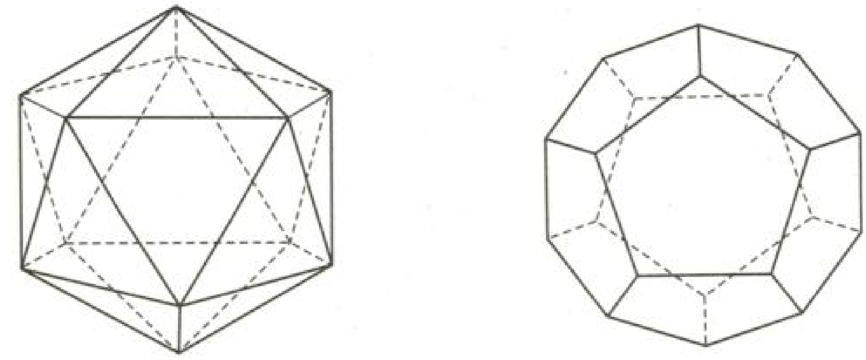
ĐỊNH NGHĨA 3

> ***Khối đa diện đều*** *là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây :*
>
> *a) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh ;*
>
> *b) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.*

Khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh được gọi là *khối đa diện đều loại* $\{n\ ;\ p\}$.

?3 *Khối tứ diện đều, khối bát diện đều và khối lập phương là những khối đa diện đều thuộc loại gì ?*

Ngoài khối tứ diện đều, khối lập phương và khối bát diện đều, hình 22 dưới đây cho ta thấy thêm hai loại nữa của khối đa diện đều.



Khối hai mươi mặt đều
(thuộc loại {3 ; 5})

Khối mười hai mặt đều
(thuộc loại {5 ; 3})

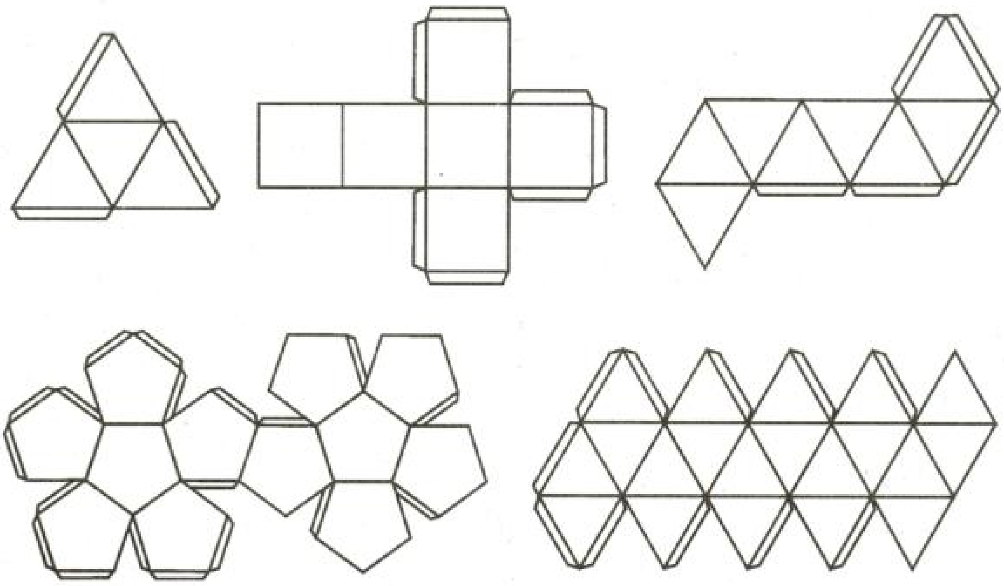
Hình 22

Người ta chứng minh được rằng chỉ có năm loại khối đa diện đều (xem bài đọc thêm *Định lí Ơ-le và khối đa diện đều*) và hai khối đa diện đều cùng loại thì đồng dạng với nhau.

Em hãy làm thử !

Chúng ta có thể làm mô hình của năm loại khối đa diện đều bằng nguyên vật liệu là bìa cứng và hồ dán.

Hãy cắt bìa cứng theo mẫu dưới đây (h.23) và dán lại thành các khối đa diện đều.



Hình 23

Câu hỏi và bài tập

11. Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến mỗi mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.

12. Cho một khối tứ diện đều. Hãy chứng minh rằng :

a) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều ;

b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

13. Hai đỉnh của một khối tám mặt đều được gọi là hai đỉnh *đối diện* nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều :

a) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường ;

b) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau ;

c) Ba đường chéo bằng nhau.

14. Chứng minh rằng :

a) Tâm các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối tám mặt đều ;

b) Tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.

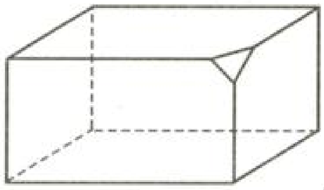
Bài đọc thêm

ĐỊNH LÍ Ơ-LE VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

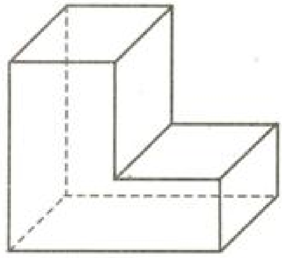
1. Đặc số Ơ-le của khối đa diện

Đối với mỗi khối đa diện $\mathscr{H}$, ta kí hiệu *Đ* là số đỉnh, *C* là số cạnh, *M* là số mặt của $\mathscr{H}$ và khi đó, số $\chi(\mathscr{H})$ = *Đ* – *C* + *M* được gọi là *đặc số Ơ-le* (còn gọi tắt là *đặc số*) của khối đa diện $\mathscr{H}$. (Chữ Hy Lạp χ đọc là "khi").

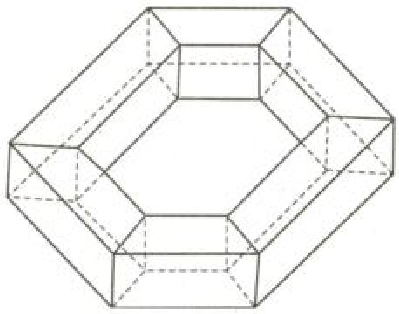
Các hình vẽ sau đây cho ta một số khối đa diện cùng với các đặc số của chúng :



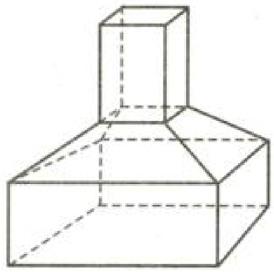
$Đ = 10, C = 15, M = 7 ; \chi = 2$



$Đ = 12, C = 18, M = 8 ; \chi = 2$



$Đ = 24, C = 48, M = 24 ; \chi = 0$



$Đ = 16, C = 28, M = 14 ; \chi = 2$

Hình 24

Như vậy, các khối đa diện có thể có các đặc số khác nhau. Tuy nhiên, nhà toán học Thuỵ Sĩ Ơ-le (L. Euler) đã chứng minh định lí mang tên ông sau đây :

Định lí Ơ-le. *Mọi khối đa diện lồi đều có đặc số bằng 2.*

Ta có thể kiểm nghiệm định lí đó cho các khối đa diện đều (đó là những khối đa diện lồi). Chú ý rằng trên hình 24 có những khối đa diện không lồi nhưng vẫn có đặc số bằng 2.

2. Chứng minh định lí về năm loại khối đa diện đều

Dùng định lí Ơ-le, ta có thể chứng minh rằng chỉ có năm loại khối đa diện đều.

Nhắc lại : Khối đa diện đều loại $\{n ; p\}$ là khối đa diện lồi có mặt là các n-giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh.

Định lí. *Chỉ có năm loại khối đa diện đều, đó là các loại :* $\{3 ; 3\}$, $\{4 ; 3\}$, $\{3 ; 4\}$, $\{5 ; 3\}$, $\{3 ; 5\}$.

Chứng minh. Giả sử khối đa diện đều loại $\{n ; p\}$ có $Đ$ đỉnh, C cạnh và M mặt.

Vì mỗi mặt có n cạnh nên M mặt sẽ có nM cạnh, nhưng mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $2C = nM$. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung cho p cạnh nên $Đ$ đỉnh sẽ có $pĐ$ cạnh, nhưng mỗi cạnh lại đi qua hai đỉnh nên $2C = pĐ$. Vậy ta có

$$pĐ = 2C = nM.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{Đ}{\frac{1}{p}}=\frac{C}{\frac{1}{2}}=\frac{M}{\frac{1}{n}}=\frac{Đ-C+M}{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}=\frac{(Đ-C+M)2pn}{2n+2p-np}.$$

Theo định lí Ơ-le, ta có $Đ - C + M = 2$ nên

$$\frac{Đ}{\frac{1}{p}}=\frac{C}{\frac{1}{2}}=\frac{M}{\frac{1}{n}}=\frac{4pn}{2n+2p-np}.$$

Vậy : $$Đ=\frac{4n}{2n+2p-np}\ ;\ C=\frac{2np}{2n+2p-np}\ ;\ M=\frac{4p}{2n+2p-np}.\ (*)$$

Vì các số $Đ$, C, M, n, p đều là những số nguyên dương nên

$$2n + 2p - np > 0 \text{ hay } (n-2)(p-2) < 4.$$

Chú ý rằng $n \geq 3$; $p \geq 3$ nên $n - 2$ và $p - 2$ là hai số nguyên dương ; ngoài ra tích số của chúng bé hơn 4. Vậy chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau :

1) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 1$ hay $n = p = 3$, ta có khối đa diện đều loại $\{3 ; 3\}$. Khi đó, từ (*) ta suy ra $Đ = 4$, $C = 6$, $M = 4$. Đó chính là khối tứ diện đều.

2) $n - 2 = 2$, $p - 2 = 1$ hay $n = 4$, $p = 3$, ta có khối đa diện đều loại $\{4 ; 3\}$. Khi đó $Đ = 8$, $C = 12$, $M = 6$. Đó chính là khối lập phương.

3) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 2$ hay $n = 3$, $p = 4$, ta có khối đa diện đều loại $\{3 ; 4\}$. Khi đó $Đ = 6$, $C = 12$, $M = 8$. Đó chính là khối tám mặt đều (còn gọi là khối bát diện đều).

4) $n - 2 = 3$, $p - 2 = 1$ hay $n = 5$, $p = 3$, ta có khối đa diện đều loại $\{5 ; 3\}$. Khi đó $Đ = 20$, $C = 30$, $M = 12$. Đó chính là khối mười hai mặt đều (còn gọi là khối thập nhị diện đều).

5) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 3$ hay $n = 3$, $p = 5$, ta có khối đa diện đều loại $\{3 ; 5\}$. Khi đó $Đ = 12$, $C = 30$, $M = 20$. Đó chính là khối hai mươi mặt đều (còn gọi là khối nhị thập diện đều).

Vậy ta có bảng sau đây :

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3 ; 3}	Khối tứ diện đều	4	6	4
{4 ; 3}	Khối lập phương	8	12	6
{3 ; 4}	Khối tám mặt đều	6	12	8
{5 ; 3}	Khối mười hai mặt đều	20	30	12
{3 ; 5}	Khối hai mươi mặt đều	12	30	20

Năm loại khối đa diện đều kể trên được nhà triết học và toán học Pla-tông (427 - 347 trước Công nguyên) tìm ra, chúng thường được gọi là *các thể Pla-tông*. Các khối đa diện theo thứ tự trong bảng trên được Pla-tông coi là tượng trưng cho *lửa*, *đất*, *khí*, *vũ trụ* và *nước*.