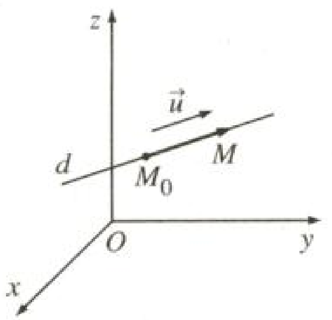
§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ (h.66). Vì $\vec{u} \neq \vec{0}$ nên ta phải có $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Ta biết rằng điều kiện cần và đủ để điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ nằm trên đường thẳng d là vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$, tức là có số $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$. Chú ý rằng



Hình 66

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0\ ;\ y - y_0\ ;\ z - z_0)$$

nên điều kiện nói trên tương đương với :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Hệ phương trình (1) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng d với tham số t. Với mỗi $t \in \mathbb{R}$, hệ phương trình trên cho ta toạ độ $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ của một điểm nằm trên d.

Ngược lại, mỗi hệ phương trình dạng (1) với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ đều là phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Từ nay, để đơn giản, trong phương trình (1) ta không viết $t \in \mathbb{R}$.

1

Cho đường thẳng d có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2t. \end{cases}$$

a) Hãy tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Xác định toạ độ của các điểm thuộc d ứng với giá trị $t = 0$, $t = 1$, $t = -2$.

c) Trong các điểm $A(3 ; 1 ; -2)$, $B(-3 ; 4 ; 2)$, $C(0 ; 2{,}5 ; 1)$, điểm nào thuộc d, điểm nào không ?

Xét đường thẳng d có phương trình tham số (1).

Trong trường hợp $abc \neq 0$, bằng cách khử t từ các phương trình của hệ (1), ta được :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \text{ với } abc \neq 0.} \qquad (2)$$

Hệ phương trình (2) được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng d.

Ngược lại, mỗi hệ phương trình như thế đều là phương trình chính tắc của một đường thẳng hoàn toàn xác định, đó là đường thẳng đi qua điểm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a ; b ; c)$.

2

Cho hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình :

$$(\alpha): 2x + 2y + z - 4 = 0$$

$$(\alpha'): 2x - y - z + 5 = 0.$$

a) Hãy giải thích tại sao hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau.

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α'). Hãy tìm toạ độ của một điểm thuộc d và xác định toạ độ của một vectơ chỉ phương của d.

c) Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(1 ; 0 ; -2)$ và $A'(2 ; 1 ; 1)$.*

Giải

Vectơ $\overrightarrow{AA'} = (1 ; 1 ; 3)$ là một vectơ chỉ phương của d, ngoài ra d đi qua điểm A nên d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$ ■

Ví dụ 2. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với*

$$A = (0\,;0\,;2),\ B = (3\,;0\,;5),\ C = (1\,;1\,;0),\ D = (4\,;1\,;2).$$

a) Viết phương trình tham số của đường cao tứ diện ABCD hạ từ D.

b) Tìm toạ độ hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;0\,;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1\,;1\,;-2)$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3\,;9\,;3)$ nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (1\,;-3\,;-1)$.

Vậy phương trình tham số của đường cao d hạ từ D của tứ diện là

$$d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

b) Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\,;-3\,;-1)$ và đi qua $A(0\,;0\,;2)$ nên có phương trình là

$$1(x-0) - 3(y-0) - 1(z-2) = 0$$

hay $x - 3y - z + 2 = 0$.

Hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC) là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC). Để tìm toạ độ điểm H, ta giải hệ gồm các phương trình của đường thẳng d và mp(ABC) :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \\ x - 3y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Thay các giá trị của x, y, z trong ba phương trình đầu vào phương trình cuối, ta có $4 + t - 3(1 - 3t) - (2 - t) + 2 = 0$. Từ đó suy ra $t = -\frac{1}{11}\cdot$ Do đó

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{11} = \frac{43}{11} \\ y = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{11} \\ z = 2 + \frac{1}{11} = \frac{23}{11}. \end{cases}$$

Vậy $\qquad H = \left(\frac{43}{11}; \frac{14}{11}; \frac{23}{11}\right)$. ■

Ví dụ 3. *Cho hai mặt phẳng* (α) *và* (α') *lần lượt có phương trình*

$$x + 2y - z + 1 = 0 \quad \textit{và} \quad x + y + 2z + 3 = 0.$$

Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng đó cắt nhau và viết phương trình tham số của giao tuyến hai mặt phẳng đó.

Giải

Hai mặt phẳng đã cho cắt nhau vì bộ ba số $(1 ; 2 ; -1)$ không tỉ lệ với bộ ba số $(1 ; 1 ; 2)$.

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm các điểm $M(x ; y ; z)$ vừa thuộc (α) vừa thuộc (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Bây giờ ta có thể viết phương trình tham số của d bằng một trong các cách sau đây :

Cách 1. Tìm toạ độ một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương của nó rồi viết phương trình tham số của d.

Cụ thể là, trong hệ (1) cho $z = 0$ rồi tìm x và y, ta được $x = -5, y = 2$.

Vậy điểm $A(-5 ; 2 ; 0)$ thuộc d.

Gọi $\overrightarrow{n_1} = (1 ; 2 ; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α), $\overrightarrow{n_2} = (1 ; 1 ; 2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α'). Đường thẳng d vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ nên nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (5 ; -3 ; -1)$.

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = -5 + 5t \\ y = 2 - 3t \\ z = -t. \end{cases}$$

Cách 2. Tìm toạ độ hai điểm phân biệt A và A' thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Cụ thể là : Trong hệ (1) cho $z = 0$, ta tìm được $x = -5$, $y = 2$. Vậy điểm $A(-5 ; 2 ; 0)$ thuộc d.

Lại cho $z = 1$, ta được $x = -10$, $y = 5$. Vậy $A'(-10 ; 5 ; 1)$ cũng thuộc d.

Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{AA'} = (-5 ; 3 ; 1)$ nên d có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = -10 - 5t \\ y = \ 5 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Cách 3. Trong hệ (1) cho $z = t$ rồi tìm x và y theo t, ta được

$$\begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t. \end{cases}$$

Đó cũng là phương trình tham số của đường thẳng d. ■

Ví dụ 4. *Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là*

$$d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases} \text{ và } d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}.$$

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 đi qua điểm $M(1 ; -1 ; 2)$, vuông góc với cả d_1 và d_2.

Giải

Các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là

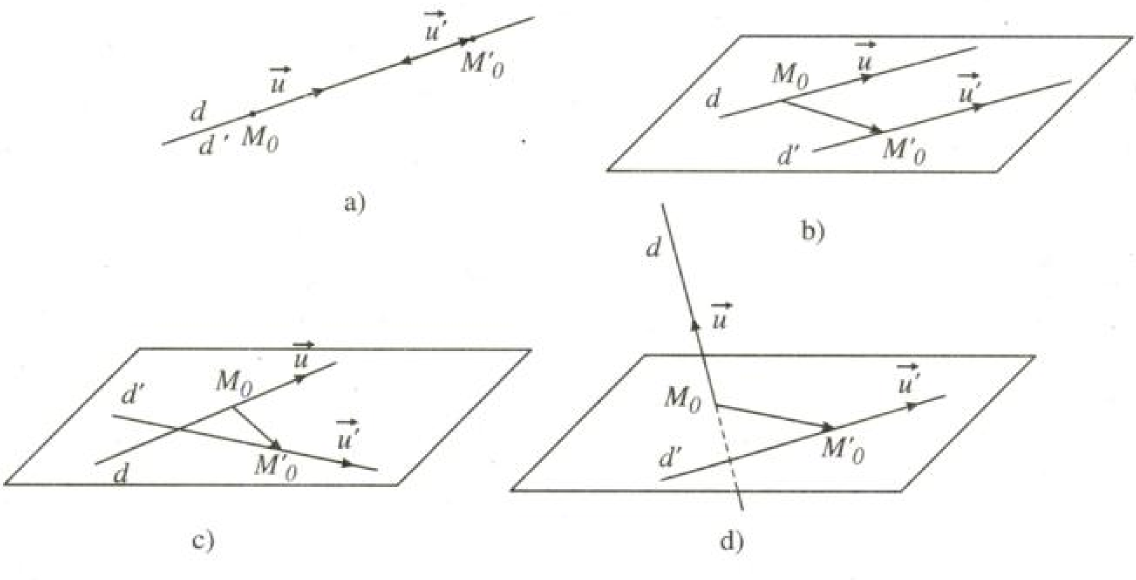
$$\overrightarrow{u_1}(1 ; -4 ; 6) \text{ và } \overrightarrow{u_2}(2 ; 1 ; -5).$$

Đường thẳng d_3 vuông góc với cả d_1 và d_2 nên một vectơ chỉ phương của d_3 là $\overrightarrow{u_3} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]$. Ta tính được $\overrightarrow{u_3} = (14; 17; 9)$ và do đó, d_3 có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}. \quad ■$$

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian, cho đường thẳng d đi qua điểm M_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua điểm M'_0, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$. Dựa vào ba vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$, ta có thể biết được vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'.



Hình 67

Cụ thể là :

a) d và d' trùng nhau khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$ đôi một cùng phương (h.67a).

b) $d \,//\, d'$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\overrightarrow{u'}$ cùng phương nhưng không cùng phương với $\overrightarrow{M_0M'_0}$ (h.67b).

c) d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ không cùng phương, đồng thời ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ đồng phẳng (h.67c).

d) d và d' chéo nhau khi và chỉ khi d, d' không đồng phẳng, hay khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ không đồng phẳng (h.67d).

Vậy ta có :

d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ đôi một cùng phương

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right] = \vec{0}.$$

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u'} \text{ cùng phương} \\ \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{M_0M_0'} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$$

$$d \text{ và } d' \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u'} \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}, \vec{u'} \text{ và } \overrightarrow{M_0M_0'} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0\,. \end{cases}$$

d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\,\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0\,.$$

? *Khi nào hai đường thẳng d và d' nói trên vuông góc với nhau ?*

Ví dụ 5. *Trong không gian Oxyz, xét cặp đường thẳng d_m, d'_m có phương trình là*

$$d_m : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases} \qquad d'_m : \begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt' \\ z = 1 - m + t'. \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó tuỳ theo giá trị của m.

Giải

Đường thẳng d_m đi qua điểm $M(1\ ;\ m\ ;\ 1-m)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(m\,;2\,;-3)$. Đường thẳng d'_m đi qua điểm $M'(m\ ;\ 0\ ;\ 1-m)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'}=(-2\ ;\ m\ ;\ 1)$. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(m-1\ ;-m\ ;0)$.

Từ đó ta tính được

$$\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'}=4m^2-7m-2=4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right).$$

Vậy :

Nếu $m\neq 2$ và $m\neq -\frac{1}{4}$ thì hai đường thẳng đã cho chéo nhau ;

Nếu $m=2$ thì $\vec{u}=(2\ ;2\ ;-3)$ và $\overrightarrow{u'}=(-2\ ;2\ ;1)$ không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau ;

Nếu $m=-\frac{1}{4}$ thì $\vec{u}=\left(-\frac{1}{4}\,;2\,;-3\right)$ và $\overrightarrow{u'}=\left(-2\,;-\frac{1}{4}\,;1\right)$ cũng không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau. ■

CHÚ Ý

Nếu biết phương trình của hai đường thẳng d và d' thì ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa chúng bằng cách giải hệ gồm các phương trình xác định d và d' để tìm giao điểm.

Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì d và d' cắt nhau.

Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì d và d' trùng nhau.

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d và d' song song hoặc chéo nhau, song song nếu hai vectơ chỉ phương của chúng cùng phương, chéo nhau nếu hai vectơ đó không cùng phương.

Ví dụ 6. *Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng*

$$(\alpha): x+y=0 \quad \text{và} \quad (\alpha'): 2x-y+z-15=0$$

và đường thẳng d' có phương trình

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3. \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'.

Giải

Cách 1

Trong hệ gồm hai phương trình của hai mặt phẳng (α) và (α'), ta cho $x = 0$ thì $y = 0$ và $z = 15$. Vậy điểm $M(0 ; 0 ; 15)$ nằm trên d.

Lại cho $x = 1$ thì $y = -1$ và $z = 12$. Vậy điểm $N(1 ; -1 ; 12)$ nằm trên d.

Như vậy d là đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1 ; -1 ; -3).$$

Đường thẳng d' đi qua $M'(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u'} = (-1 ; 2 ; 0).$$

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1 ; 2 ; -12)$.

Dễ thấy rằng $\overrightarrow{MM'} = 4\vec{u} + 3\overrightarrow{u'}$, tức là ba vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{MM'}$ đồng phẳng. Ngoài ra hai vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ không cùng phương.

Từ đó suy ra hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Cách 2

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}(1 ; 1 ; 0)$.

Mặt phẳng (α') có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}(2 ;-1 ;1)$.

Do đó, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1 ;-1 ;-3)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'} = (-1 ; 2 ; 0)$.

Ta có $\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (6 ; 3 ; 1) \neq \vec{0}$.

Mặt khác, điểm $M_0(0 ; 0 ; 15) \in d$, điểm $M_0'(1 ; 2 ; 3) \in d'$,

$$\overrightarrow{M_0M_0'} = (1 ; 2 ; -12).$$

Ta suy ra $\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Cách 3

Để tìm toạ độ giao điểm của d và d', ta giải hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z - 15 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3. \end{cases}$$

Bằng cách thay các giá trị của x, y, z ở ba phương trình cuối vào hai phương trình đầu của hệ, ta được

$$\begin{cases} 2(1 - t) - (2 + 2t) + 3 - 15 = 0 \\ 1 - t + 2 + 2t \ = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4t - 12 = 0 \\ t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -3.$$

Khi đó $x = 4$, $y = -4$, $z = 3$.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm $(4 ; -4 ; 3)$. ■

4. Một số bài toán về tính khoảng cách

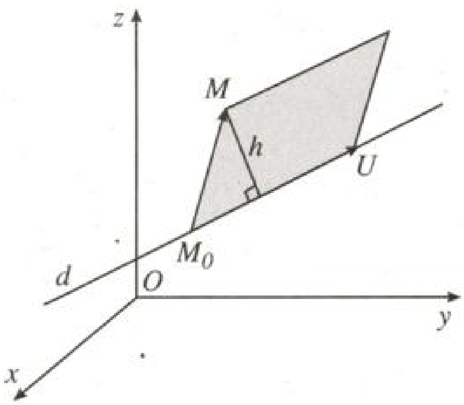
Ta đã có các công thức để tính khoảng cách giữa hai điểm và khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Bây giờ, ta xét khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Bài toán 1. *Tính khoảng cách h từ một điểm M đến đường thẳng d đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.*

Cách giải

Gọi U là điểm sao cho $\overrightarrow{M_0U} = \vec{u}$ (h.68).

Nếu $M \notin d$ thì diện tích S của hình bình hành có hai cạnh M_0M và M_0U là



Hình 68

$$S = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0U}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|.$$

Vì khoảng cách h cần tìm là chiều cao của hình bình hành ứng với cạnh M_0U nên ta có

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

Nếu $M \in d$ thì hiển nhiên $h = 0$ và công thức nói trên vẫn đúng. ■

3

Tính khoảng cách từ điểm $M(4\,;-3\,;2)$ đến đường thẳng d có phương trình

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

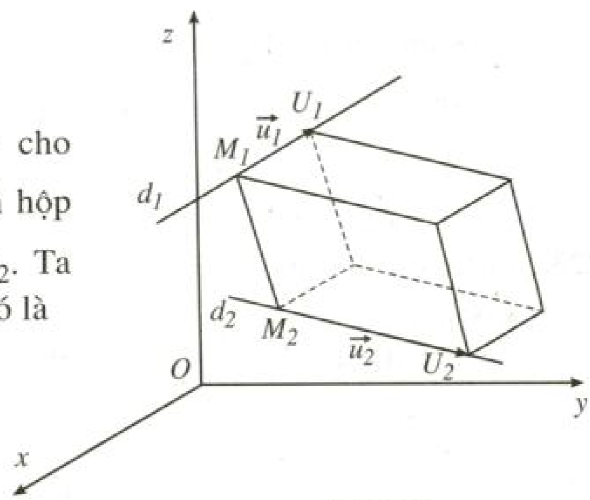
Bài toán 2. *Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2, biết d_1 đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$; d_2 đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$.*

Cách giải (h.69)

Lấy các điểm U_1 và U_2 sao cho $\overrightarrow{M_1U_1} = \overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{M_2U_2} = \overrightarrow{u_2}$. Xét hình hộp có ba cạnh là M_1U_1, M_2U_2, M_1M_2. Ta biết rằng thể tích V của hình hộp đó là

$$V = \left|\left[\overrightarrow{M_1U_1}, \overrightarrow{M_2U_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|$$

$$= \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|.$$



Hình 69

Nếu ta xem M_1M_2 là cạnh bên của hình hộp đó thì diện tích mặt đáy của hình hộp là $S = \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|$. Khi đó, khoảng cách h giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 chính là chiều cao của hình hộp. Vậy ta có :

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$ ■

4

Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 có phương trình như sau :

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3} \quad \text{và} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 3-t. \end{cases}$$

Câu hỏi và bài tập

24. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :

a) Các trục tọa độ Ox, Oy và Oz ;

b) Các đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ (với $x_0.y_0.z_0 \neq 0$) và song song với mỗi trục toạ độ ;

c) Đường thẳng đi qua $M(2 ; 0 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 3 ; 5)$;

d) Đường thẳng đi qua $N(-2 ; 1 ; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0 ; 0 ; -3)$;

e) Đường thẳng đi qua $N(3 ; 2 ; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$2x - 5y + 4 = 0 ;$$

g) Đường thẳng đi qua hai điểm $P(2 ; 3 ; -1)$ và $Q(1 ; 2 ; 4)$.

25. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :

a) Đường thẳng đi qua điểm $(4 ; 3 ; 1)$ và song song với đường thẳng có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(-2 ; 3 ; 1)$ và song song với đường thẳng có phương trình :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

26. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

trên mỗi mặt phẳng toạ độ.

27. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 7 = 0$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d và một điểm nằm trên d.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

28. Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng d và d' cho bởi phương trình :

a) $d : \dfrac{x-1}{2} = y - 7 = \dfrac{z-3}{4}$; $\qquad d' : \dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

b) $d : \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

d' là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha) : x + y - z = 0$,

$(\alpha') : 2x - y + 2z = 0$.

29. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1 ; -1 ; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng sau đây :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t ; \end{cases} \qquad d' : \begin{cases} x = t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 2 + t'. \end{cases}$$

30. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases} ; \; d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3} ; \; d_3 : \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t'. \end{cases}$$

31. Cho hai đường thẳng :

$$d_1 : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2 : \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O, song song với cả d_1 và d_2.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

32. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình :

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5} \; ; \qquad (\alpha) : 2x + y + z - 8 = 0.$$

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm toạ độ giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α).

33. Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình :

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \; ; \qquad (P) : 2x + z - 5 = 0.$$

a) Xác định toạ độ giao điểm A của Δ và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

34. a) Tính khoảng cách từ điểm $M(2 ; 3 ; 1)$ đến đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

b) Tính khoảng cách từ điểm $N(2 ; 3 ; -1)$ đến đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; -\frac{3}{4}\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-4 ; 2 ; -1)$.

35. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau :

a) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3. \end{cases}$

b) $d : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và $d' : \begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t'. \end{cases}$