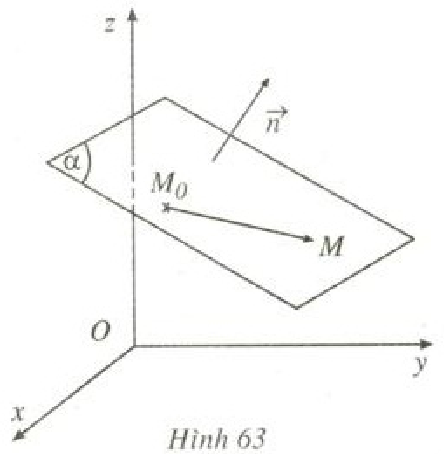
§2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Phương trình mặt phẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).

Rõ ràng nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mp(α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mp(α).



Hình 63

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A ; B ; C)$. Chú ý rằng vì $\vec{n} \neq \vec{0}$ nên $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ thuộc (α) là $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$ (h.63), hay

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Nhận xét. Nếu ta đặt $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ thì phương trình (1) trở thành :

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0, \text{ trong đó } A^2 + B^2 + C^2 > 0.} \qquad (2)$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt phẳng* (α) hay nói gọn là *phương trình mp*(α).

Như vậy, ta dễ dàng viết được phương trình mặt phẳng nếu biết toạ độ của một điểm thuộc nó và toạ độ một vectơ pháp tuyến của nó.

Ví dụ 1. *Viết phương trình mặt phẳng* (α) *đi qua ba điểm* $M(0 ; 1 ; 1)$, $N(1 ; -2 ; 0)$ *và* $P(1 ; 0 ; 2)$.

Giải. Ta có $\overrightarrow{MN} = (1 ; -3 ; -1)$ và $\overrightarrow{MP} = (1 ; -1 ; 1)$. Từ đó ta tính được $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-4 ; -2 ; 2)$. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ nên $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Như vậy, (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình

$$-4(x - 0) - 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \text{ hay } 2x + y - z = 0. \quad \blacksquare$$

1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1 ; -2 ; 3)$ và $B(-5 ; 0 ; 1)$. Hãy viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

Như vậy, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng (2). Định lí sau đây khẳng định điều ngược lại.

ĐỊNH LÍ

> *Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình*
>
> $Ax + By + Cz + D = 0$ *với* $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
>
> *đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.*

2 (để chứng minh định lí).

Lấy một nghiệm $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ nào đó của phương trình (2), tức là

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A\,;B\,;C)$. Hãy viết phương trình của (P) để thấy rằng nó tương đương với phương trình (2).

2. Các trường hợp riêng

Chúng ta hãy xét một số trường hợp riêng của phương trình mặt phẳng và nói rõ trong mỗi trường hợp đó, mặt phẳng có đặc điểm gì.

3

Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (α) có phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Hãy giải thích vì sao ta có các khẳng định sau đây :

a) Mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ O khi và chỉ khi $D = 0$.

b) Mặt phẳng (α) song song (hoặc chứa) trục toạ độ Ox khi và chỉ khi $A = 0$.

Hãy phát biểu kết luận tương tự cho trường hợp $B = 0$ và trường hợp $C = 0$.

c) Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) khi và chỉ khi $A = B = 0$.

Hãy phát biểu kết luận tương tự cho trường hợp $B = C = 0$ và trường hợp $C = A = 0$.

Sau đây ta xét trường hợp mặt phẳng có phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ *với các hệ số* } A, B, C, D \text{ *đều khác* } 0.$$

Khi đó bằng cách đặt $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$, ta đưa phương trình trên về dạng

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \qquad (3)$$

Rõ ràng mặt phẳng có phương trình (3) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $M(a\,;\,0\,;\,0)$, $N(0\,;\,b\,;\,0)$ và $P(0\,;\,0\,;\,c)$. Độ dài đại số của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ trên các trục toạ độ chứa chúng lần lượt là $\overline{OM} = a$; $\overline{ON} = b$; $\overline{OP} = c$. Bởi vậy phương trình (3) được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*

Ví dụ 2. *Trong không gian Oxyz, cho điểm $M = (30 ; 15 ; 6)$.*

a) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua các hình chiếu của M trên các trục toạ độ.

b) Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm O trên mp(α).

Giải

a) Các hình chiếu của M trên các trục toạ độ là các điểm $(30 ; 0 ; 0)$, $(0 ; 15 ; 0)$ và $(0 ; 0 ; 6)$. Phương trình mp(α) đi qua ba điểm đó là

$$\frac{x}{30}+\frac{y}{15}+\frac{z}{6}=1 \text{ hay } x+2y+5z-30=0.$$

b) Điểm H nằm trên mặt phẳng (α) và vectơ $\overrightarrow{OH}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1 ; 2 ; 5)$ của (α), tức là $\overrightarrow{OH} = t\vec{n}$. Bởi vậy, nếu gọi $(x ; y ; z)$ là toạ độ của H thì

$$\begin{cases} x+2y+5z-30=0 \\ x=t \\ y=2t \\ z=5t. \end{cases}$$

Bằng cách thay các giá trị x, y, z từ ba phương trình cuối vào phương trình đầu, ta được $t + 4t + 25t - 30 = 0$. Từ đó ta tìm được $t = 1$ và do đó $H = (1 ; 2 ; 5)$. ■

3. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Hai bộ số tỉ lệ

Xét các bộ n số $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ $(n > 2)$, trong đó các số $x_1, x_2, ..., x_n$ không đồng thời bằng 0.

• Hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ như thế được gọi là *tỉ lệ với nhau* (hay *tỉ lệ*) nếu có một số t sao cho $A_1 = tB_1, A_2 = tB_2, ..., A_n = tB_n$. Khi đó ta viết

$$A_1 : A_2 : ... : A_n = B_1 : B_2 : ... : B_n \text{ hoặc } \frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=...=\frac{A_n}{B_n}.$$

Theo định nghĩa đó, ta có

$$1 : -2 : 3 = 2 : -4 : 6 \text{ hay } \frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6} \text{ (ở đây } t=\frac{1}{2}\text{)} ;$$

$$2 : 0 : 4 : 0 = 1 : 0 : 2 : 0 \text{ hay } \frac{2}{1}=\frac{0}{0}=\frac{4}{2}=\frac{0}{0} \text{ (ở đây } t=2\text{)}.$$

• Khi hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ không tỉ lệ, ta viết

$$A_1 : A_2 : ... : A_n \neq B_1 : B_2 : ... : B_n.$$

Ví dụ : $1:5:-2:4 \neq 1:-2:5:4$,

$1:0:1:2 \neq 1:1:1:2$.

• Ta hãy xét trường hợp hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ tỉ lệ, nhưng hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n ; A_{n+1})$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n ; B_{n+1})$ không tỉ lệ. Điều đó có nghĩa là : có số t sao cho $A_1 = tB_1, A_2 = tB_2, ..., A_n = tB_n$ nhưng $A_{n+1} \neq tB_{n+1}$. Trong trường hợp đó, ta viết :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = ... = \frac{A_n}{B_n} \neq \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}.$$

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0 ;$$

chúng lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A ; B ; C)$ và $\vec{n'}(A' ; B' ; C')$.

$\boxed{?1}$ *Nếu $A : B : C \neq A' : B' : C'$ thì ta có thể nói gì về hai vectơ $\vec{n}(A ; B ; C)$ và $\vec{n'}(A' ; B' ; C')$ và do đó nói gì về vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (α') ?*

Bây giờ ta xét trường hợp $A : B : C = A' : B' : C'$ hay $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$.

4

Hãy xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau :

a) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$;

b) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.

Tóm lại ta có :

> *Cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình :*
>
> $$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$
>
> $$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$
>
> a) *Hai mặt phẳng đó cắt nhau khi và chỉ khi* $A : B : C \neq A' : B' : C'$.
>
> b) *Hai mặt phẳng đó song song khi và chỉ khi*
>
> $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$
>
> c) *Hai mặt phẳng đó trùng nhau khi và chỉ khi*
>
> $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

$\boxed{?2}$ *Hai mặt phẳng (α) và (α') nói trên vuông góc với nhau khi nào ?*

5

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - my + 10z + m + 1 = 0$

$$(\beta): x - 2y + (3m + 1)z - 10 = 0.$$

Hãy tìm giá trị của m để :

a) Hai mặt phẳng đó song song ;

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau ;

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

4. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $Ax + By + Cz + D = 0$. Hoàn toàn tương tự như công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng trong hình học phẳng, ta có công thức sau đây về khoảng cách $d(M_0, (\alpha))$ từ điểm M_0 tới mp(α) :

$$\boxed{d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

6

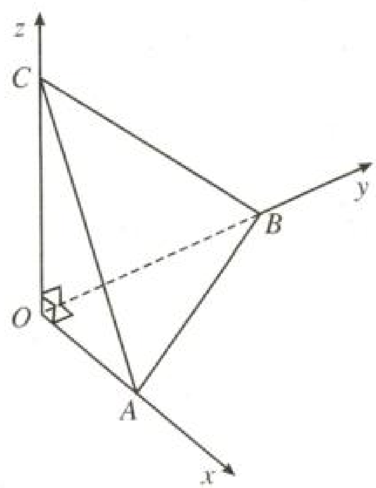
Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là :

$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{và} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

Ví dụ 3. *Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, OA = a, OB = b, OC = c. Tính độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ O.*

Giải

Vì ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có thể chọn hệ toạ độ có gốc là O và có $A = (a ; 0 ; 0)$, $B = (0 ; b ; 0)$, $C = (0 ; 0 ; c)$ (h.64). Khi đó mp(ABC) có phương trình theo đoạn chắn là



Hình 64

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$

Chiều cao h cần tìm là khoảng cách từ điểm O tới mp(ABC) nên

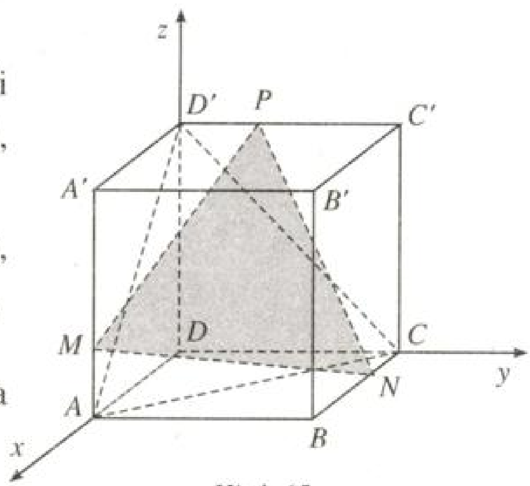
$$h=\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}.$$ ■

Ví dụ 4. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh AA', BC, $C'D'$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = CN = D'P = t$, với $0 < t < a$. Chứng minh rằng mp(MNP) song song với mp(ACD') và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.*

Giải

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với D, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua A, C và D' như ở hình 65. Khi đó :

$A=(a;0;0)$, $C=(0;a;0)$, $D'=(0;0;a)$,
$M=(a;0;t)$, $N=(t;a;0)$, $P=(0;t;a)$.



Hình 65

Phương trình theo đoạn chắn của mp(ACD') là :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \text{ hay } x+y+z-a=0.$$

Mặt phẳng đó có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Mặt khác, mp(MNP) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]$.

Ta có $\quad \overrightarrow{MN}=(t-a;a;-t)$; $\overrightarrow{MP}=(-a;t;a-t)$.

Từ đó ta tìm được toạ độ của $\overrightarrow{n'}$ là

$$\overrightarrow{n'}=(a^2+t^2-at;\ a^2+t^2-at;\ a^2+t^2-at).$$

Bởi vậy hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ cùng phương ; ngoài ra dễ thấy điểm M không nằm trên mp(ACD') ; do đó mp(MNP) // mp(ACD').

Khoảng cách d giữa hai mặt phẳng đó bằng khoảng cách từ điểm M của mp(MNP) tới mp(ACD') nên ta có

$$d = \frac{|a + 0 + t - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{t\sqrt{3}}{3}. \quad ■$$

Câu hỏi và bài tập

15. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng :

a) Đi qua ba điểm $M(2 ; 0 ; -1)$, $N(1 ; -2 ; 3)$, $P(0 ; 1 ; 2)$;

b) Đi qua hai điểm $A(1 ; 1 ; -1)$, $B(5 ; 2 ; 1)$ và song song với trục Oz ;

c) Đi qua điểm $(3 ; 2 ; -1)$ và song song với mặt phẳng có phương trình $x - 5y + z = 0$;

d) Đi qua hai điểm $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$;

e) Đi qua điểm $M(a ; b ; c)$ (với $abc \neq 0$) và song song với một mặt phẳng toạ độ ;

g) Đi qua điểm $G(1 ; 2 ; 3)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC ;

h) Đi qua điểm $H(2 ; 1 ; 1)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

16. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau :

a) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$;

b) $x - 2y + z - 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$;

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y + 2z + 3 = 0$;

d) $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

e) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

17. Xác định giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây song song :

a) $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$;

b) $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$.

18. Cho hai mặt phẳng có phương trình là

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0$$

và $$(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì :

a) Hai mặt phẳng đó song song ;

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau ;

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc ?

19. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\alpha) : 2x - y + 4z + 5 = 0,$ $(\alpha') : 3x + 5y - z - 1 = 0$;

b) $(\alpha) : 2x + y - 2z - 1 = 0,$ $(\alpha') : 6x - 3y + 2z - 2 = 0$;

c) $(\alpha) : x + 2y + z - 1 = 0,$ $(\alpha') : x + 2y + z + 5 = 0.$

20. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{và} \quad Ax + By + Cz + D' = 0$$

với $D \neq D'$.

21. Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau :

a) M cách đều điểm $A(2 ; 3 ; 4)$ và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$;

b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$.

22. Cho tứ diện $OABC$ có các tam giác OAB, OBC, OCA là những tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp toạ độ, hãy chứng minh :

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn ;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

23. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0.$$