

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Kiến thức cần nhớ

A - Mặt cầu, khối cầu

1. Mặt cầu $S(O ; R)$ là tập hợp $\{M \mid OM = R\}$. Khối cầu $S(O ; R)$ là tập hợp $\{M \mid OM \leq R\}$.

Mặt cầu là hình tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh một đường thẳng chứa đường kính của đường tròn đó.

Khối cầu là hình tròn xoay sinh bởi một hình tròn khi quay quanh một đường thẳng chứa đường kính của hình tròn đó.

2. Giao của mặt cầu $S(O ; R)$ và $mp(P)$ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O đến (P) . Giả sử H là hình chiếu của O trên $mp(P)$. Khi đó :

- Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn nằm trên (P) có tâm H , bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;
 - Nếu $d = R$ thì mp (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O ; R)$ tại H ;
 - Nếu $d > R$ thì mp (P) không cắt mặt cầu $S(O ; R)$.
3. Giao của mặt cầu $S(O ; R)$ và đường thẳng Δ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O tới Δ . Giả sử H là hình chiếu của O trên Δ . Khi đó :
- Nếu $d < R$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(O ; R)$ tại hai điểm phân biệt ;
 - Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O ; R)$ tại H . Các đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại H ;
 - Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu $S(O ; R)$.
4. Về các tiếp tuyến của mặt cầu đi qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu :
- Các đoạn thẳng nối A và các tiếp điểm bằng nhau.
 - Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.
5. Hình cầu bán kính R có diện tích bằng $4\pi R^2$ và có thể tích bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

B - Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

1. Mặt trụ là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ song song với l .
- Mặt trụ có trục Δ , bán kính R là tập hợp tất cả các điểm cách đường thẳng Δ một khoảng R .
2. Hình trụ là phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng phân biệt vuông góc với trục của mặt trụ, cùng với hai hình tròn giới hạn bởi hai đường tròn là giao tuyến của mặt trụ với hai mặt phẳng nói trên.
- Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi bốn cạnh của một hình chữ nhật khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.
- Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích số chu vi đường tròn đáy và chiều cao.
- Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.
3. Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong của hình trụ đó.
- Khối trụ là hình tròn xoay sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả các điểm nằm trong nó) khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.
- Thể tích khối trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

C - Mặt nón, hình nón và khối nón

1. Mặt nón là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ cắt l nhưng không vuông góc với l .

Mặt nón đỉnh O , trục Δ (O thuộc Δ), góc ở đỉnh 2α là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua O và tạo với Δ một góc bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

2. Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số chu vi đáy và độ dài đường sinh.

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

3. Khối nón là hình nón cùng với phần bên trong của hình nón đó.

Khối nón là hình tròn xoay sinh bởi một hình tam giác vuông (kể cả phần trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số của diện tích đáy và chiều cao.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?
 - a) Mặt cầu, khối cầu đều có vô số mặt phẳng đối xứng.
 - b) Mọi tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
 - c) Mọi hình chóp có cạnh bên bằng nhau đều có mặt cầu ngoại tiếp.
 - d) Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp.
 - e) Mặt nón, hình nón, khối nón đều có vô số mặt phẳng đối xứng.
 - g) Mặt trụ, hình trụ, khối trụ đều có duy nhất một mặt phẳng đối xứng.
2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?
 - a) Mọi đường thẳng đều có chung với mặt trụ (hoặc mặt nón) nhiều nhất là hai điểm.
 - b) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.
 - c) Mọi đường tròn lớn của mặt cầu đều đi qua hai điểm cố định.
 - d) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt trụ có bán kính bằng nhau.
 - e) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt nón có bán kính khác nhau.

III - Bài tập

1. Cho mp(P) và điểm A không thuộc (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.
2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, biết $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.
3. Cho hai đường tròn ($O ; r$) và ($O' ; r'$) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').
 - a) Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.
 - b) Tính bán kính R của mặt cầu (S) khi $r = 5$, $r' = \sqrt{10}$, $AB = 6$, $OO' = \sqrt{21}$.
4. Cho một hình nón \mathcal{N} sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao của tam giác đó.
 - a) Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón \mathcal{N} thì có bán kính bằng bao nhiêu ?
 - b) Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón \mathcal{N} thì có bán kính bằng bao nhiêu ?
5. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = c$, $AC = b$. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích của các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC .
 - a) Tính V_1, V_2, V_3 theo b, c .
 - b) Chứng minh rằng $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.
6. Một hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $DC = 4a$, cạnh bên $AD = BC = 3a$. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay sinh bởi hình thang đó khi quay quanh trục đối xứng của nó.

IV - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
 - (A) Mọi hình hộp đều có mặt cầu ngoại tiếp ;
 - (B) Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp ;

- (C) Mọi hình hộp có một mặt bên vuông góc với đáy đều có mặt cầu ngoại tiếp ;
 (D) Mọi hình hộp chữ nhật đều có mặt cầu ngoại tiếp.
2. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R thì
 (A) Hình hộp có đáy là hình vuông có thể tích lớn nhất ;
 (B) Hình lập phương có thể tích lớn nhất ;
 (C) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng công sai khác 0 có thể tích lớn nhất ;
 (D) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số nhân công bội khác 1 có thể tích lớn nhất.
3. Một hình cầu có thể tích $\frac{4}{3}\pi$ ngoại tiếp một hình lập phương. Thể tích của khối lập phương đó là
 (A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; (B) $\frac{8}{3}$; (C) 1; (D) $2\sqrt{3}$.
4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
 (A) Hình chóp có đáy là tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp ;
 (B) Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp ;
 (C) Hình chóp có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp ;
 (D) Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.
5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là
 (A) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;
 (B) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$;
 (C) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;
 (D) Đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

6. Mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ cạnh a có bán kính là
- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $2a\sqrt{2}$.
7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau ;
- (B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng song song ;
- (C) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau ;
- (D) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt và không cùng nằm trong một mặt phẳng.
8. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp các điểm M sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là
- (A) Hai đường thẳng song song ;
- (B) Một mặt cầu ;
- (C) Một mặt trụ ;
- (D) Một mặt nón.
9. Cho hai điểm phân biệt A, B cố định. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng $\frac{AB}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B trên l . Tập hợp các điểm H là
- (A) Một mặt phẳng ; (B) Một mặt trụ ;
- (C) Một mặt nón ; (D) Một đường tròn.
10. Với điểm O cố định thuộc mặt phẳng (P) cho trước, xét đường thẳng l thay đổi đi qua O và tạo với (P) góc 30° . Tập hợp các đường thẳng l trong không gian là
- (A) Một mặt phẳng ; (B) Hai đường thẳng ;
- (C) Một mặt trụ ; (D) Một mặt nón.

11. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a , đường cao $OO' = a\sqrt{3}$. Một đoạn thẳng AB thay đổi sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng 30° , A, B thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Tập hợp các trung điểm I của AB là
- (A) Một mặt trụ ;
 (B) Một mặt cầu ;
 (C) Một đường tròn.
 (D) Một mặt phẳng.
12. Trong mặt phẳng (P) cho góc xOy . Một mặt phẳng (Q) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy , cắt Ox, Oy tại A, B . Trong (Q) lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Khi ấy, tập hợp các điểm M là
- (A) Một đường tròn ; (B) Một mặt trụ ;
 (C) Một mặt nón ; (D) Một mặt cầu.
13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc $AC'A'$ khi quay quanh AA' bằng
- (A) $\pi a^2 \sqrt{6}$; (B) $\pi a^2 \sqrt{3}$;
 (C) $\pi a^2 \sqrt{2}$; (D) $\pi a^2 \sqrt{5}$.
14. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a . Một dây cung thay đổi của đường tròn đáy có độ dài không đổi bằng a . Tập hợp các trung điểm của đoạn thẳng nối đỉnh hình nón với trung điểm của dây cung đó là
- (A) Một mặt nón cố định ;
 (B) Một mặt phẳng cố định ;
 (C) Một mặt trụ cố định ;
 (D) Một đường tròn cố định.
15. Cho hình trụ có bán kính đáy R , đường cao OO' . Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng (α) tùy ý vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng h cho trước ($h < R$). Khi ấy, mp (α) có tính chất :
- (A) Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định ;
 (B) Luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h ;

- (C) Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông ;
 (D) Cả ba tính chất trên đều sai.
16. Một khối trụ có bán kính đáy $a\sqrt{3}$, chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ là
- (A) $8\sqrt{6}\pi a^3$; (B) $6\sqrt{6}\pi a^3$; (C) $\frac{4}{3}\sqrt{6}\pi a^3$; (D) $4\sqrt{3}\pi a^3$.
17. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là
- (A) $\sqrt{3}$; (B) $2\sqrt{3}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
18. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính là
- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; (C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
19. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng
- (A) $\frac{a^3\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}$; (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$; (C) $\frac{a^3\sqrt{2\sqrt{3}}}{8}$; (D) $\frac{a^3\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$.
20. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90° . Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy hình nón bằng 60° . Khi đó diện tích thiết diện là
- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; (C) $\frac{2}{3}a^2$; (D) $\frac{3}{2}a^2$.
21. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60° . Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là
- (A) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (B) $\frac{3\pi a^2}{4}$; (C) $\frac{3\pi a^2}{6}$; (D) $\frac{3\pi a^2}{8}$.

22. Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao $2R$. Tỷ số thể tích khối cầu và khối trụ là

- (A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 2 ; (D) $\frac{1}{2}$.

23. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R , chiều cao cũng bằng R . Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, mp($ABCD$) không vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ. Diện tích hình vuông đó là

- (A) $\frac{5R^2}{2}$; (B) $5R^2$; (C) $\frac{5R^2\sqrt{2}}{2}$; (D) $5R^2\sqrt{2}$;

24. Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a, b, c . Thể tích của khối trụ là

(A) $\frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$;

(B) $\frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a$;

(C) $\frac{1}{4}\pi(c^2 + a^2)b$;

(D) $\frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$ hoặc $\frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a$ hoặc $\frac{1}{4}\pi(c^2 + a^2)b$.

25. Một khối tứ diện đều có cạnh a nội tiếp một khối nón. Thể tích khối nón là

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi a^3$; (B) $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$; (D) $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi a^3$.

26. Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy, lấy một điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí của M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

(A) Có 1 vị trí;

(B) Có 2 vị trí;

(C) Có 3 vị trí;

(D) Có vô số vị trí.