

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I - Bài tập tự luận

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R . Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác $P'Q'R'$.
 - a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ $P'Q'R'.P'Q'R'$.
 - b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR} \cdot AA'$, trong đó S_{PQR} là diện tích tam giác PQR .
2. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho.
3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Hãy tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$.
4. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tam mặt đều. Hãy so sánh thể tích của tứ diện đều đã cho và thể tích của hình tam mặt đều đó.
5. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O ; R)$. Gọi \mathcal{H} là hình gồm các điểm của hình tròn $(O ; R)$ nhưng không nằm trong hình vuông. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi hình \mathcal{H} khi quay quanh đường thẳng chứa một đường chéo của hình vuông.

6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .
- Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng AD .
 - Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và DE .
7. Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD .
- Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ diện đều.
 - Chứng minh rằng các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định (tức là khoảng cách giữa mỗi đường thẳng đó và trực của mặt trụ bằng bán kính mặt trụ).
8. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 5; 3)$, $B(4; 2; -5)$, $C(5; 5; -1)$ và $D(1; 2; 4)$.
- Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.
 - Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D . Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.
 - Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng đó.
 - Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).
 - Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ.
9. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

- Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng toạ độ.
- Chứng minh rằng mặt phẳng $x + 5y + z + 4 = 0$ đi qua đường thẳng Δ .
- Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và các trực toạ độ.
- Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và

$$\Delta' : x = y = z.$$

- Viết phương trình đường thẳng song song với Oz , cắt cả Δ và Δ' .

10. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; 1)$.

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$.

b) Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $NA^2 + NB^2 = 3$.

c) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy) .

11. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$$

trong đó a, b, c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2$.

a) Chứng minh đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của Δ và $mp(Oxy)$.

12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A tới $mp(A'BD)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng $C'D$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

II - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho \mathcal{H} là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Xét các mặt phẳng : (SAC) , (SAB) , (SBD) , (ABC) , (SOI) , trong đó I là trung điểm của AB , O là tâm hình vuông $ABCD$. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng là mặt phẳng đối xứng của \mathcal{H} ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

2. Gọi \mathcal{H} là lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Xét các mặt phẳng : $mp(AA'D)$, $mp(ACA')$, $mp(ABB')$, mặt phẳng trung trực của DD' , mặt phẳng trung trực của AB . Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng là mặt phẳng đối xứng của \mathcal{H} ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

3. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của cạnh AB . Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai ?
- (A) $V_{A'B'C'C} = V_{MA'B'C'}$; (B) $V_{ABCC'} = V_{A'BCC'}$;
 (C) $V_{MA'B'C'} = V_{A'ABC}$; (D) $V_{MA'B'C'} = \frac{1}{2}V_{AA'B'C'}$.
4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai ?
- (A) $V_{A'BCC'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$; (B) $V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$;
 (C) $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{AA'BC}$; (D) $V_{C.ABB'A'} = V_{C'.ABB'A'}$.
5. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ và các điểm A', B', C', D' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC, SD nhưng không trùng với S .
 Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?
- (A) $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$;
 (B) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}$;
 (C) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SC}{SC'} + \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SD}{SD'}$;
 (D) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'}$.
6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Hình lăng trụ nội tiếp một mặt cầu nếu đáy của nó là đa giác nội tiếp ;
 (B) Hình lăng trụ nội tiếp một mặt cầu nếu tất cả các mặt của nó đều là đa giác nội tiếp ;
 (C) Hình lăng trụ nội tiếp một mặt cầu nếu có mặt bên vuông góc với mặt đáy ;
 (D) Đa diện nội tiếp một mặt cầu nếu các mặt của nó đều là đa giác nội tiếp.
7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Đường tròn đi qua ba điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu ;

- (B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua 4 đỉnh của một hình thang cân cho trước ;
(C) Hình chóp có đáy là hình thang vuông luôn luôn nội tiếp một mặt cầu ;
(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

8. Cho khối trụ có bán kính $a\sqrt{3}$ và chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của nó là
(A) $4\pi a^3\sqrt{2}$; (B) $9a^3\sqrt{3}$;
(C) $6\pi a^3\sqrt{3}$; (D) $6\pi a^2\sqrt{3}$.

9. Đáy của một hình chóp là hình vuông có diện tích bằng 4. Các mặt bên của nó là những tam giác đều. Diện tích toàn phần của hình chóp là
(A) $4 + 4\sqrt{3}$; (B) 8 ;
(C) 16 ; (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

10. Một hình nón có đường sinh bằng l và bằng đường kính đáy. Bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là
(A) $\frac{1}{3}l$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}l$;
(C) $\frac{\sqrt{2}}{6}l$; (D) $\frac{3}{4}l$.

11. Một hình cầu có thể tích bằng $\frac{4\pi}{3}$, nội tiếp một hình lập phương. Thể tích của hình lập phương đó bằng
(A) 8 ; (B) 4π ; (C) 1 ; (D) $2\pi\sqrt{3}$.

12. Cho hình chữ nhật có hai đỉnh $A(-2; 3; 0)$, $B(2; 3; 0)$ và một cạnh nằm trên trục Ox . Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật đó khi quay quanh trục Oy có thể tích là
(A) $6\pi^2$; (B) 12 ; (C) 12π ; (D) $\frac{4\pi}{3}$.

13. Cho hai vectơ $\vec{u}(1; 0; 2)$ và $\vec{v}(0; -1; 1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào cùng phương với $[\vec{u}, \vec{v}]$?
(A) $\vec{a}(1; 1; 1)$; (B) $\vec{b}(-2; 1; 1)$;
(C) $\vec{c}(0; 1; -1)$; (D) $\vec{d}(2; 2; -1)$.

14. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 5 = 0$. Thể tích hình chóp $S.ABC$ với $S = (1; 1; 1)$ bằng

- (A) $3\sqrt{6}$; (B) $12\sqrt{2}$;
 (C) 8; (D) 4.

15. Mặt cầu tâm $I(6; 3; -4)$, tiếp xúc với trục Ox có bán kính là

- (A) 5; (B) $2\sqrt{3}$;
 (C) $4\sqrt{3}$; (D) 4.

16. Cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Phương trình tham số nào sau đây cũng là phương trình của d ?

- | | |
|--|--|
| <p>(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$</p> <p>(C) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$</p> | <p>(B) $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$</p> <p>(D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$</p> |
|--|--|
17. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Khi đó :
- | | |
|--|---|
| <p>(A) d cắt d';</p> <p>(C) d và d' chéo nhau;</p> | <p>(B) d trùng d';</p> <p>(D) d song song với d'.</p> |
|--|---|

18. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình

$$(P) : 3x + 4z + 12 = 0; \quad (S) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1.$$

Khi đó :

- (A) mp(P) đi qua tâm mặt cầu (S) ;
 (B) mp(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ;

- (C) mp(P) cắt (S) theo một đường tròn ;
(D) mp(P) không cắt (S).

19. Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 0; 1)$ trên đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$$

là

- (A) $(1; 0; 2)$; (B) $(2; 2; 3)$; (C) $(0; -2; 1)$; (D) $(-1; 4; 0)$.

20. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $d' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Khoảng cách giữa d và d' là

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (B) $\frac{\sqrt{14}}{2}$;
(C) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; (D) $\sqrt{2}$.

21. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}$

Phương trình đường vuông góc chung của d và d' là

- (A) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$
(C) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$; (D) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$.

22. Cho mặt phẳng $(P) : mx + y + (n-2)z + m + 2 = 0$. Với mọi m, n , mặt phẳng (P) luôn đi qua điểm cố định có toạ độ là

- (A) $(1; 2; 0)$; (B) $(2; 1; 0)$;
(C) $(0; 1; -2)$; (D) $(-1; -2; 0)$.

23. Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm $A(3; 4; 3)$ có phương trình :
- (A) $4x + 4y - 2z - 17 = 0$; (B) $2x + 2y + z - 17 = 0$;
 (C) $2x + 4y + z - 17 = 0$; (D) $x + y + z - 17 = 0$.

III - Một số đề kiểm tra

ĐỀ I

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

- a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.
- b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
- c) Gọi A' và C' lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và SC . Chứng minh rằng hai hình chóp $A'.ABCD$ và $C'.CBAD$ bằng nhau.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4; -1; 2)$, $B(1; 2; 2)$ và $C(1; -1; 5)$.

- a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.
- b) Viết phương trình $mp(ABC)$. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi $mp(ABC)$ và các mặt phẳng toạ độ.
- c) Viết phương trình trực của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- d) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

ĐỀ II

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , AC và AD .

- a) Chứng minh rằng sáu điểm B , C , D , B' , C' , D' nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính của mặt cầu đó.
- b) Tính thể tích khối chóp $D.BCC'B'$.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2 ; 0 ; 0)$, $A'(6 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 3 ; 0)$, $B'(0 ; 4 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$, $C'(0 ; 0 ; 3)$.

- Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, A', B, C . Chứng minh rằng B' và C' cũng nằm trên mặt cầu đó.
- Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC , trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ cùng nằm trên một đường thẳng đi qua O . Viết phương trình đường thẳng đó.
- Tính khoảng cách từ điểm O tới giao tuyến của $\text{mp}(ABC')$ và $\text{mp}(A'B'C)$.

ĐỀ III

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm nằm trên cạnh AB và (α) là mặt phẳng đi qua ba điểm D, N, B' .

- Mặt phẳng (α) cắt hình hộp đã cho theo thiết diện là hình gì?
- Chứng minh rằng mặt phẳng (α) phân chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện \mathcal{H}_1 và \mathcal{H}_2 bằng nhau.
- Tính tỉ số thể tích của khối đa diện \mathcal{H}_1 và thể tích của khối tứ diện $AA'BD$.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1 ; -3 ; -1)$ và $B(-2 ; 1 ; 3)$.

- Chứng tỏ rằng hai điểm A và B cách đều trục Ox .
- Tìm điểm C nằm trên trục Oz sao cho tam giác ABC vuông tại C .
- Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB trên $\text{mp}(Oyz)$.
- Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm O, A, B và có tâm nằm trên $\text{mp}(Oxy)$.