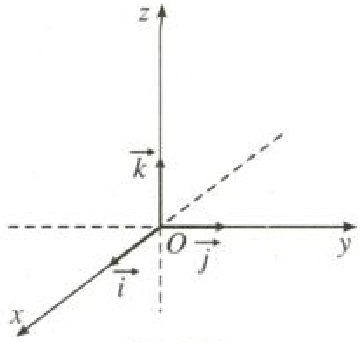
§1 HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục toạ độ trong không gian

Trong hình học phẳng, ta đã biết hệ trục toạ độ trên mặt phẳng. Hệ đó thường được kí hiệu là Oxy hoặc $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. Bây giờ ta thiết lập hệ trục toạ độ trong không gian.

Trong không gian, xét ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz có chung điểm gốc O và đôi một vuông góc với nhau (h.56).



Hình 56

ĐỊNH NGHĨA 1

> *Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là **hệ trục toạ độ vuông góc** trong không gian.*

Thuật ngữ và kí hiệu

Hệ trục toạ độ trong định nghĩa trên còn được gọi đơn giản là *hệ toạ độ trong không gian*, và kí hiệu là $Oxyz$. Ta thường gọi các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và còn kí hiệu hệ trục toạ độ là $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Điểm O gọi là *gốc* của hệ toạ độ, hoặc đơn giản là *gốc toạ độ*, Ox gọi là *trục hoành*, Oy gọi là *trục tung*, Oz gọi là *trục cao*.

Các mặt phẳng đi qua hai trong ba trục toạ độ gọi là các *mặt phẳng toạ độ*, ta kí hiệu chúng là mp(Oxy), mp(Oyz) và mp(Oxz), hoặc đơn giản hơn là (Oxy), (Oyz), (Oxz).

Khi không gian đã có một hệ toạ độ $Oxyz$ thì nó được gọi là *không gian toạ độ Oxyz* hoặc đơn giản là *không gian Oxyz*.

Ta cần chú ý tới các đẳng thức sau đây :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \\ &\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0. \end{aligned}}$$

$\boxed{?1}$ *Tại sao ta có các đẳng thức trên ?*

2. Toạ độ của vectơ

Trong không gian toạ độ $Oxyz$ với các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trên các trục, cho một vectơ $\vec{u}$. Khi đó có bộ ba số duy nhất $(x ; y ; z)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Bộ ba số đó cũng được gọi là *toạ độ của vectơ $\vec{u}$* đối với hệ toạ độ $Oxyz$ và kí hiệu $\vec{u} = (x ; y ; z)$ hoặc $\vec{u}\,(x ; y ; z)$. Vậy :

$$\boxed{\vec{u} = (x ; y ; z) \Leftrightarrow \vec{u}\,(x ; y ; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.}$$

Hiển nhiên theo định nghĩa và kí hiệu trên, ta có

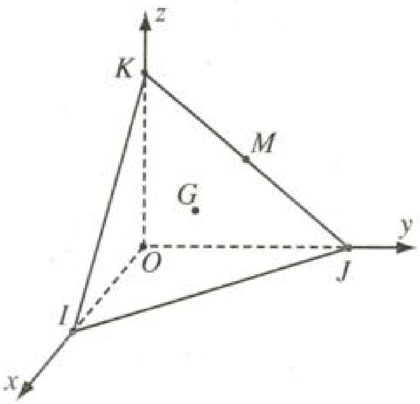
$$\vec{i} = (1; 0; 0)\ ;\ \vec{j} = (0; 1; 0)\ ;\ \vec{k} = (0; 0; 1).$$

?2 *Tại sao nếu vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(x ; y ; z)$ đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ thì $x = \vec{u}.\vec{i}\ ;\ y = \vec{u}.\vec{j}\ ;\ z = \vec{u}.\vec{k}$?*

Ví dụ 1. *Trong không gian toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, gọi I, J, K là các điểm sao cho $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Gọi M là trung điểm của JK, G là trọng tâm tam giác IJK.*

a) Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

b) Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MG}$.



Hình 57

Giải (h.57)

a) Ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right) = 0\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},$$

do đó $\overrightarrow{OM} = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{k},$$

hay $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{6} ; -\frac{1}{6}\right)$. ■

Từ định nghĩa về toạ độ của vectơ, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây :

Cho các vectơ $\overrightarrow{u_1} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ *và số k tuỳ ý, ta có :*

1) $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

2) $\overrightarrow{u_1} \pm \overrightarrow{u_2} = (x_1 \pm x_2 ; y_1 \pm y_2 ; z_1 \pm z_2)$

3) $k\overrightarrow{u_1} = (kx_1 ; ky_1 ; kz_1)$

4) $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

5) $\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{u_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

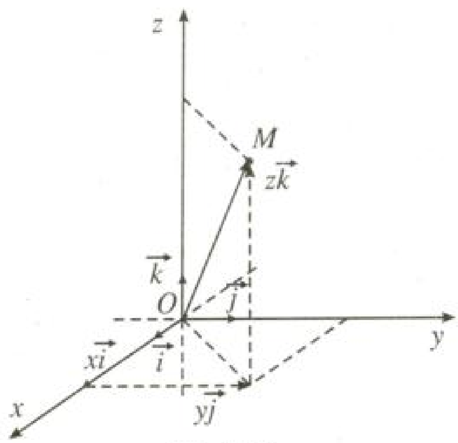
6) $\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

với $\overrightarrow{u_1} \neq \vec{0}, \overrightarrow{u_2} \neq \vec{0}$

7) $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

3. Toạ độ của điểm

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, mỗi điểm M được hoàn toàn xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$ (h.58). Bởi vậy, nếu $(x ; y ; z)$ là toạ độ của $\overrightarrow{OM}$ thì ta cũng nói $(x ; y ; z)$ là *toạ độ của điểm M* và kí hiệu là $M = (x ; y ; z)$ hoặc $M(x ; y ; z)$.



Hình 58

Như vậy :

$$\boxed{M = (x ; y ; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.}$$

Nếu điểm M có toạ độ $(x ; y ; z)$ thì số x gọi là *hoành độ*, số y gọi là *tung độ* và số z gọi là *cao độ* của điểm M.

?3 *Cho hệ toạ độ Oxyz và điểm* $M(x ; y ; z)$. *Tại sao có các khẳng định sau ?*

a) $M \equiv O \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

b) $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, *tức là* $M = (x ; y ; 0)$.

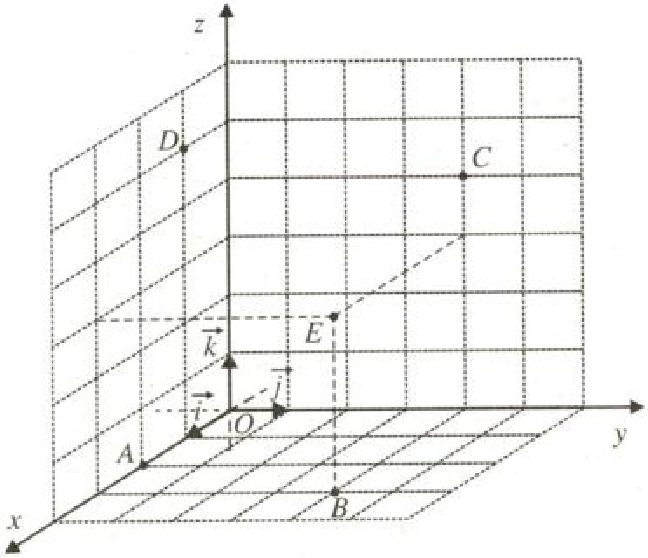
$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, *tức là* $M = (0 ; y ; z)$.

$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, *tức là* $M = (x ; 0 ; z)$.

$\boxed{?4}$ *Với điều kiện nào của x, y, z thì điểm M(x ; y ; z) nằm trên một trục toạ độ ?*

1

Trên hình 59 có một hệ trục toạ độ $Oxyz$ cùng với các hình vuông có cạnh bằng đơn vị.



Hình 59

a) Xác định toạ độ của các điểm A, B, C, D, E.

b) Dựng điểm P nếu $P = (3 ; 6 ; -3)$.

4. Liên hệ giữa toạ độ của vectơ và toạ độ của hai điểm mút

Cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OA} = (x_A ; y_A ; z_A)$ và $\overrightarrow{OB} = (x_B ; y_B ; z_B)$. Ta lại biết rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Từ đó ta suy ra toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của nó :

1) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.

2) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

2

Trong không gian toạ độ Oxyz cho bốn điểm không đồng phẳng $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$, $D(x_D ; y_D ; z_D)$.

a) Tìm toạ độ của trung điểm đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ của trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 2. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(5 ; 3 ; -1)$, $B(2 ; 3 ; -4)$, $C(1 ; 2 ; 0)$, $D(3 ; 1 ; -2)$.

1. *Chứng minh rằng :*

a) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng ;

b) Tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau ;

c) Hình chóp D.ABC là hình chóp đều.

2. *Tìm toạ độ chân đường cao H của hình chóp D.ABC.*

Giải

1. a) Ta phải chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{DA} = (2 ; 2 ; 1)$, $\overrightarrow{DB} = (-1 ; 2 ; -2)$ và $\overrightarrow{DC} = (-2 ; 1 ; 2)$ không đồng phẳng. Rõ ràng hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên nếu ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng thì phải có các số m và n sao cho

$$m\overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \text{ hay } \begin{cases} -m - 2n = 2 \\ 2m + n = 2 \\ -2m + 2n = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình trên vô nghiệm, suy ra ba vectơ ấy không đồng phẳng.

b) Ta có $\overrightarrow{DA} = (2 ; 2 ; 1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1 ; -1 ; 4)$.

Vậy $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = -2 - 2 + 4 = 0$. Suy ra $DA \perp BC$.

Làm tương tự ta cũng có $DB \perp AC$ và $DC \perp AB$.

c) $DA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$;

$DB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$;

$DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Tương tự, ta cũng có $AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$. Vậy $D.ABC$ là hình chóp đều.

2. Vì $D.ABC$ là hình chóp đều nên H trùng với trọng tâm tam giác ABC hay $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Từ đó suy ra

$$H = \left(\frac{8}{3} ; \frac{8}{3} ; -\frac{5}{3}\right). \blacksquare$$

5. Tích có hướng của hai vectơ

Ta đã biết về tích vô hướng của hai vectơ. Ta cần nhớ rằng tích đó là một số và có thể tính được dễ dàng nếu biết toạ độ của hai vectơ.

Sau đây ta sẽ nói về *tích có hướng* của hai vectơ.

Khác với tích vô hướng, tích có hướng không phải là một số mà là một vectơ, bởi vậy tích có hướng còn được gọi là *tích vectơ.*

ĐỊNH NGHĨA 2

Tích có hướng *(hay tích vectơ) của hai vectơ* $\vec{u}(a; b; c)$ *và* $\vec{v}(a'; b'; c')$ *là một vectơ, kí hiệu là* $[\vec{u}, \vec{v}]$ *(hoặc* $\vec{u} \wedge \vec{v}$*), được xác định bằng toạ độ như sau :*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = (bc' - b'c ; ca' - c'a ; ab' - a'b).$$

Ví dụ 3. *Cho* $\vec{u} = (1 ; 0 ; -1)$ *và* $\vec{v} = (2 ; 1 ; 1)$ *thì ta có :*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; -3; 1).$$

3

Đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, hãy chứng tỏ các công thức sau đây đúng :

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} ; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} ; [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}.$$

Tính chất của tích có hướng

Các tính chất sau đây của tích có hướng thường được áp dụng khi giải một số bài toán hình học :

1. *Vectơ* $[\vec{u}, \vec{v}]$ *vuông góc với cả hai vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *, tức là*

$$[\vec{u}, \vec{v}].\vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}].\vec{v} = 0.$$

2. $|[\vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}).$

3. $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ *khi và chỉ khi hai vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *cùng phương.*

Chứng minh

1. Giả sử $\vec{u} = (a\,;b\,;c)$ và $\vec{v} = (a'\,;b'\,;c')$. Từ định nghĩa của tích có hướng ta có

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(bc' - b'c\,;\, ca' - c'a\,;\, ab' - a'b\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{u} &= (bc' - b'c)a + (ca' - c'a)b + (ab' - a'b)c \\ &= bc'a - b'ca + ca'b - c'ab + ab'c - a'bc = 0.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{v} = 0$.

2. Nếu một trong hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $\vec{0}$ thì tính chất 2 là hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp cả hai vectơ đó đều khác $\vec{0}$. Khi đó, vì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|}$ nên

$$|\vec{u}|.|\vec{v}|\sin(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sqrt{1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})}$$

$$= |\vec{u}|.|\vec{v}|\sqrt{1 - \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2}} = \sqrt{\vec{u}^2.\vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}$$

$$= \sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right) - (aa' + bb' + cc')^2}$$

$$= \sqrt{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2} = \left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right|.$$

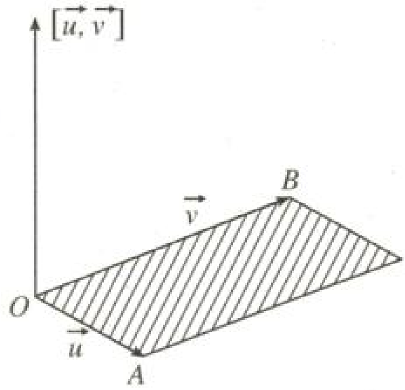
3. Tính chất này được suy ra trực tiếp từ tính chất 2. ■

☞ CHÚ Ý

Ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Nếu hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương (h.60), ta gọi S là diện tích hình bình hành có hai cạnh là OA và OB, khi đó

$$\begin{aligned}|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}) &= OA.OB.\sin\widehat{AOB} \\ &= S.\end{aligned}$$

Vậy độ dài của vectơ $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$ bằng số đo diện tích hình bình hành nói trên.



Hình 60

Ứng dụng của tích có hướng

a) Tính diện tích hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì theo chú ý trên, ta có $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

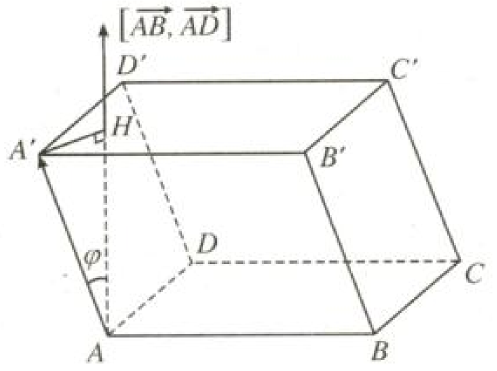
b) Tính thể tích khối hộp

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp với diện tích đáy $ABCD$ là S, chiều cao là $h = AH$, φ là góc hợp bởi hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]$ (h.61) thì thể tích của hình hộp đó là

$$V = S.h = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.AH$$

$$= \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\cos\varphi\right|.$$

Vậy $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.



Hình 61

4

Hãy chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0$.

Như vậy, chúng ta nên nhớ một số tính chất liên quan đến tích vô hướng và tích có hướng sau đây

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$

$\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}.$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *đồng phẳng* $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0.$

Ví dụ 4. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 2)$, $C(-1 ; 1 ; 0)$ và $D(2 ; 1 ; -2)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

c) Tính góc CBD và góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

d) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D.

Giải

a) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD} \neq 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{BC} = (0\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{BD} = (3\ ;\ 1\ ;\ -4)$. Suy ra :

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = (-1\ ;\ 2\ ;\ 1).$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD} = (-1).3 + 2.1 + 1.(-4) = -5 \neq 0.$$

Vậy bốn điểm đã cho không đồng phẳng.

b) Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Nếu gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $2p$ là chu vi của tam giác đó thì $S_{ABC} = p.r$. Dễ dàng tính được

$$2p = AB + BC + CA = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

nên ta có
$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

c) $\cos\widehat{CBD} = \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{9}{\sqrt{130}}.$

Nếu gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD thì

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

d) Ta dễ thấy thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{1}{6}$ thể tích khối hộp có ba cạnh là BA, BC, BD. Như vậy :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right| = \frac{5}{6}.$$

Nếu gọi DK là đường cao của tứ diện kẻ từ D thì

$$DK = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}. \quad ■$$

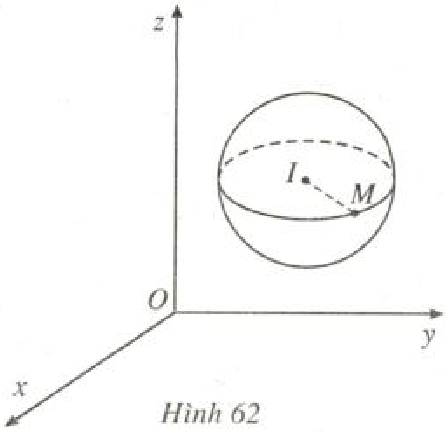
6. Phương trình mặt cầu

Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $S(I\ ;R)$ có tâm $I(x_0\ ; y_0\ ; z_0)$ và bán kính R (h.62).

Điểm $M(x\ ; y\ ; z)$ thuộc mặt cầu đó khi và chỉ khi $IM = R$ hay $IM^2 = R^2$, nghĩa là

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Phương trình trên được gọi là *phương trình của mặt cầu* $S(I\ ; R)$.



Hình 62

Như vậy, nếu biết toạ độ của tâm và biết bán kính mặt cầu thì ta có thể dễ dàng viết được phương trình của mặt cầu đó.

Mặt cầu tâm $I(x_0\ ; y_0\ ; z_0)$, bán kính R có phương trình

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

5

Hãy viết phương trình mặt cầu có đường kính A_1A_2 với

$$A_1 = (a_1\ ; b_1\ ; c_1) \text{ và } A_2 = (a_2\ ; b_2\ ; c_2)$$

theo hai cách sau :

– Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của mặt cầu.

– Nhận xét rằng điểm M nằm trên mặt cầu khi và chỉ khi $\overrightarrow{A_1M}.\overrightarrow{A_2M} = 0$.

6

Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 1)$.

Nhận xét. Nếu ta khai triển phương trình mặt cầu $S(I\ ; R)$ và viết dưới dạng $f(x, y, z) = 0$ thì dễ thấy rằng $f(x, y, z)$ là đa thức bậc hai đối với x, y, z, có các hệ số của x^2, y^2, z^2 đều bằng 1 và không có các hạng tử chứa xy, yz, zx.

Bây giờ ta xét vấn đề ngược lại : *Phương trình dạng*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \qquad (1)$$

có phải là phương trình mặt cầu trong không gian toạ độ Oxyz cho trước hay không ?

Phương trình (1) có thể viết như sau :

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d. \qquad (2)$$

Gọi I là điểm có toạ độ $(-a\ ;-b\ ;-c)$ và M là điểm có toạ độ $(x\ ;y\ ;z)$ thì vế trái của (2) chính là IM^2. Bởi vậy ta dễ dàng suy ra :

Nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì $IM=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Vậy (1) là phương trình của mặt cầu có tâm $I(-a\ ;-b\ ;-c)$ và có bán kính

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\,.$$

Nếu $a^2+b^2+c^2-d=0$ thì $IM=0$ và phương trình (1) xác định điểm I duy nhất.

Nếu $a^2+b^2+c^2-d<0$ thì không có điểm M nào có toạ độ thoả mãn (1). Vậy :

> *Phương trình $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ là phương trình của mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2>d$. Khi đó tâm mặt cầu là điểm $I(-a\ ;-b\ ;-c)$ và bán kính mặt cầu là*
>
> $$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}.$$

7

Mỗi phương trình sau đây có phải là phương trình mặt cầu hay không ? Nếu phải thì hãy xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$;

b) $3x^2+3y^2+3z^2-2x=0$;

c) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$;

d) $(x+y)^2=2xy-z^2+1$.

Câu hỏi và bài tập

Từ nay trở đi, các bài tập liên quan đến toạ độ đều được xét trong không gian toạ độ Oxyz.

1. Cho các vectơ :

$$\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}\ ;\ \vec{v}=3\vec{i}+5\left(\vec{j}-\vec{k}\right)\ ;\ \vec{w}=2\vec{i}-\vec{k}+3\vec{j}\,.$$

a) Tìm toạ độ của các vectơ đó.

b) Tìm côsin của các góc $\left(\vec{v},\vec{i}\right)$, $\left(\vec{v},\vec{j}\right)$ và $\left(\vec{v},\vec{k}\right)$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

2. Cho vectơ $\vec{u}$ tuỳ ý khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng :

$$\cos^2\left(\vec{u},\vec{i}\right)+\cos^2\left(\vec{u},\vec{j}\right)+\cos^2\left(\vec{u},\vec{k}\right)=1\,.$$

3. Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u} = (1 ; 1 ; 1)$; $\vec{v} = (2 ; 1 ; -1)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

4. Biết $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\dfrac{2\pi}{3}$. Tìm k để vectơ $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

5. Cho điểm $M(a ; b ; c)$.

a) Tìm toạ độ hình chiếu (vuông góc) của M trên các mặt phẳng toạ độ và trên các trục toạ độ.

b) Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng toạ độ, đến các trục toạ độ.

c) Tìm toạ độ của các điểm đối xứng với M qua các mặt phẳng toạ độ.

6. Cho hai điểm $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Tìm toạ độ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$), trong đó $k \neq 1$.

7. Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-3 ; -2 ; 0)$, $B(3 ; -3 ; 1)$, $C(5 ; 0 ; 2)$. Tìm toạ độ đỉnh D và tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. a) Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều hai điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và $B(-3 ; -3 ; 2)$.

b) Cho ba điểm $A(2 ; 0 ; 4)$, $B(4 ; \sqrt{3} ; 5)$ và $C(\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$. Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc toạ độ).

9. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u}(4 ; 3 ; 4)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 2)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$;

b) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$, $\vec{w}(4 ; 2 ; 3)$;

c) $\vec{u}(4 ; 2 ; 5)$, $\vec{v}(3 ; 1 ; 3)$, $\vec{w}(2 ; 0 ; 1)$.

10. Cho ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 1)$, $C(2 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.

d) Tính các góc của tam giác ABC.

11. Cho bốn điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và $D(-2 ; 1 ; -2)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối của tứ diện đó.

c) Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AC = b$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

13. Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của mỗi mặt cầu sau đây :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$;

c) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$.

14. Trong mỗi trường hợp sau, hãy viết phương trình mặt cầu :

a) Đi qua ba điểm $A(0 ; 8 ; 0)$, $B(4 ; 6 ; 2)$, $C(0 ; 12 ; 4)$ và có tâm nằm trên mp(Oyz) ;

b) Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox ;

c) Có tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz).