CHƯƠNG I VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để *xác định một vectơ* cần biết một trong hai điều kiện sau :

– Điểm đầu và điểm cuối của vectơ ;

– Độ dài và hướng của vectơ.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì chúng có thể *cùng hướng* hoặc *ngược hướng*.

3. *Độ dài* của một vectơ là *khoảng cách* giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

4. $\vec{a} = \vec{b}$ khi và chỉ khi $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

5. Với mỗi điểm A ta gọi $\overrightarrow{AA}$ là *vectơ - không*. Vectơ - không được kí hiệu là $\vec{0}$, do đó $|\vec{0}| = 0$ và ta quy ước rằng vectơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ

1. Phương pháp

- Để xác định vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ ta cần biết $|\vec{a}|$ và hướng của $\vec{a}$ hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Chẳng hạn, với hai điểm phân biệt A và B ta có hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
- Vectơ $\vec{a}$ là vectơ - không khi và chỉ khi $|\vec{a}| = 0$ hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho 5 điểm phân biệt *A, B, C, D* và *E*. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho ?

GIẢI

Với hai điểm phân biệt, chẳng hạn A và B, có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$. Với 5 điểm phân biệt đã cho, ta có 10 tập hợp khác nhau, cụ thể là :

$$\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{C,D\},\{C,E\},\{D,E\}.$$

Do đó ta có 20 vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là 5 điểm đã cho.

Cách khác : Một vectơ được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với 5 điểm phân biệt, ta có 5 cách chọn điểm đầu. Với mỗi cách chọn điểm đầu ta có 4 cách chọn điểm cuối. Vậy số vectơ khác $\vec{0}$ là : $5 \times 4 = 20$ (vectơ).

Ví dụ 2. Cho điểm *A* và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm *M* sao cho :

a) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$;

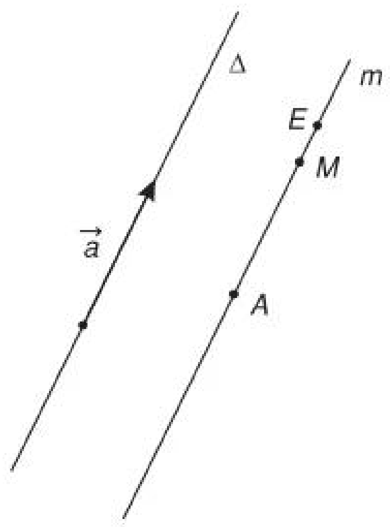
b) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

GIẢI

Gọi Δ là giá của $\vec{a}$ (h.1.1).

a) Nếu $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ thì đường thẳng AM song song với Δ. Do đó M thuộc đường thẳng m đi qua A và song song với Δ.

Ngược lại, mọi điểm M thuộc đường thẳng m thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.



Hình 1.1

Chú ý rằng nếu A thuộc đường thẳng Δ thì m trùng với Δ.

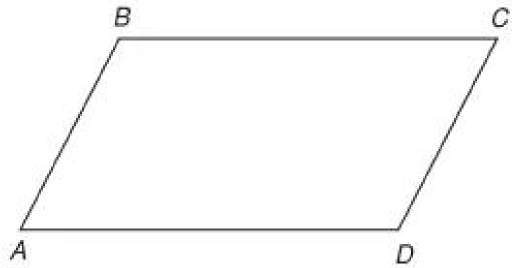
b) Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm M thuộc một nửa đường thẳng gốc A của đường thẳng m. Cụ thể, đó là nửa đường thẳng có chứa điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai vectơ bằng nhau

1. Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau :



Hình 1.2

- $\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}.$

- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (h.1.2).

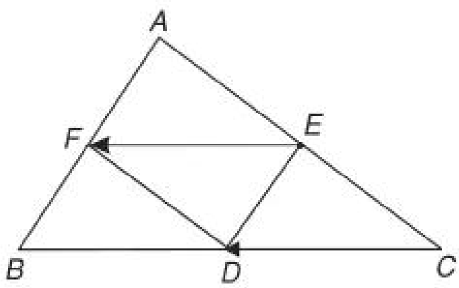
- Nếu $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

GIẢI

(Xem h.1.3)



Hình 1.3

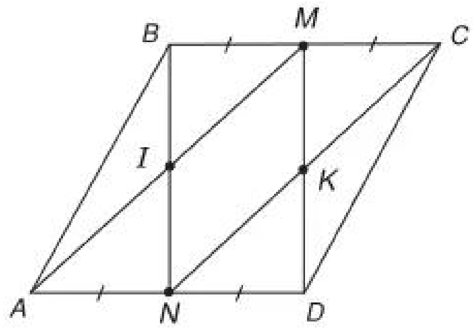
Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF = \frac{1}{2}BC = CD$ và $EF \parallel CD$.

Do đó tứ giác $EFDC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

GIẢI

Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành vì $MC = AN$ và $MC \parallel AN$. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ (h.1.4).



Hình 1.4

Vì $MCDN$ là hình bình hành nên K là trung điểm của MD. Suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KM}$. Tứ giác $IMKN$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{KM}$. Do đó $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm đầu (hoặc điểm cuối) thì chúng có chung điểm cuối (hoặc điểm đầu).

GIẢI

Giả sử $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó $AB = AC$, ba điểm A, B, C thẳng hàng và B, C thuộc một nửa đường thẳng gốc A. Do đó $B \equiv C$.

Nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm cuối thì chúng có chung điểm đầu được chứng minh tương tự.

Ví dụ 4. Cho điểm A và vectơ $\vec{a}$. Dựng điểm M sao cho :

a) $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$;

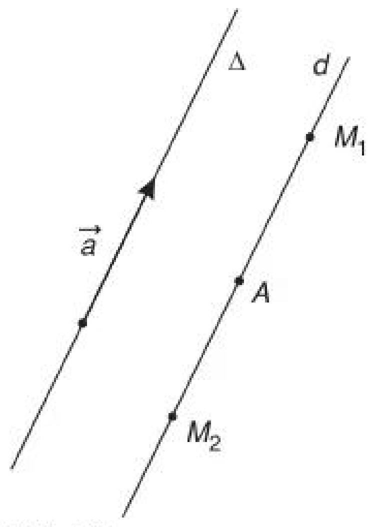
b) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|\vec{a}|$.

GIẢI

Gọi Δ là giá của vectơ $\vec{a}$. Vẽ đường thẳng d đi qua A và $d \parallel \Delta$ (nếu điểm A thuộc Δ thì d trùng với Δ). Khi đó có hai điểm M_1 và M_2 thuộc đường thẳng d sao cho $AM_1 = AM_2 = |\vec{a}|$ (h.1.5). Ta có :

a) $\overrightarrow{AM_1} = \vec{a}$;

b) $\overrightarrow{AM_1}$ và $\overrightarrow{AM_2}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng độ dài của $\vec{a}$.

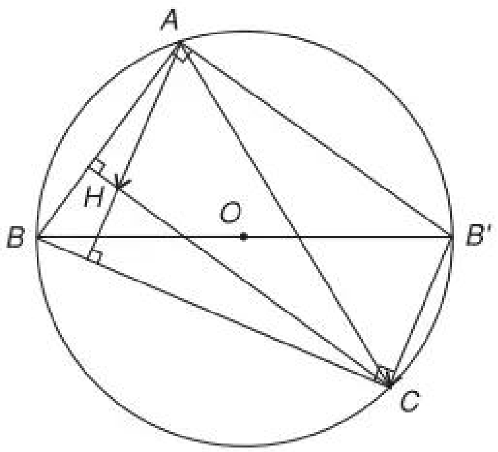


Hình 1.5

Ví dụ 5. Cho tam giác *ABC* có *H* là trực tâm và *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi *B'* là điểm đối xứng của *B* qua *O*. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

GIẢI

Vì BB' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90^{\circ}$. Do đó $CH \parallel B'A$ và $AH \parallel B'C$. Suy ra tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành. Vậy $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (h.1.6).



Hình 1.6

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Hãy tính số các vectơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau :

a) Hai điểm ;

b) Ba điểm ;

c) Bốn điểm.

1.2. Cho hình vuông *ABCD* tâm *O*. Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

1.3. Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P* và *Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*, *CD* và *DA*. Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

1.4. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *M* và *N* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB* và *AC*. So sánh độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$. Vì sao có thể nói hai vectơ này cùng phương ?

1.5. Cho tứ giác *ABCD*, chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

1.6. Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt *A*, *B* và *C* trong các trường hợp sau :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

1.7. Cho hình bình hành *ABCD*. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.