$$\tan 135^o = \frac{\sin 135^o}{\cos 135^o} = -1.$$

Do đó $\cot 135^o = -1$.

Ví dụ 2. Cho tam giác cân *ABC* có $\widehat{B} = \widehat{C} = 15^o$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc *A*.

GIẢI

Ta có $\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^o - 30^o = 150^o$.

Vậy $\sin A = \sin(180^o - 150^o) = \sin 30^o = \frac{1}{2}$;

$$\cos A = -\cos(180^o - 150^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\tan A = \frac{\sin 150^o}{\cos 150^o} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó $\cot A = -\sqrt{3}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng :

a) $\sin A = \sin(B + C)$;

b) $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$;

c) $\tan A = -\tan(B + C)$.

GIẢI

Vì $180^o - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ nên ta có :

a) $\sin A = \sin(180^o - A) = \sin(B + C)$;

b) $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$ vì $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 90^o$ (hai góc phụ nhau) ;

c) $\tan A = -\tan(180^o - A) = -\tan(B + C)$.

VẤN ĐỀ 2

Cho biết một giá trị lượng giác của góc α, tìm các giá trị lượng giác còn lại của α

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc α và các hệ thức cơ bản liên hệ giữa các giá trị đó như :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$, hãy tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

GIẢI

Vì $\cos\alpha < 0$ nên $90^o < \alpha < 180^o$. Suy ra $\sin\alpha > 0$ và $\tan\alpha < 0$.

Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên thay giá trị $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ vào ta có :

$$\sin^2\alpha + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{5}{9}.$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho góc α, biết $0^o < \alpha < 90^o$ và $\tan\alpha = 2$.

Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

GIẢI

Theo giả thiết ta có : $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$. Do đó $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. (1)

Mặt khác ta lại có : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có : $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}.$$

Vì $0^o < \alpha < 90^o$ nên $\cos\alpha > 0$, do đó $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, mà $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ nên ta có $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

GIẢI

Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ (vì $\sin\alpha > 0$)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}. \text{ Do đó } \cot\alpha = \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 4. Cho góc α biết $\tan\alpha = -2$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

GIẢI

Vì $\tan\alpha = -2 < 0$ nên $90^o < \alpha < 180^o$, suy ra $\cos\alpha < 0$.

Vì $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ nên $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$.

Vậy $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).(-2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Nhận xét. Có thể dùng hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ để tính $\sin\alpha$ như sau :

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Do đó $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (vì $\sin\alpha > 0$).

VẤN ĐỀ 3

Cho biết một giá trị lượng giác của góc α, hãy xác định góc α đó

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc α để dựng góc α và trong một số trường hợp có thể sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để dựng góc α.

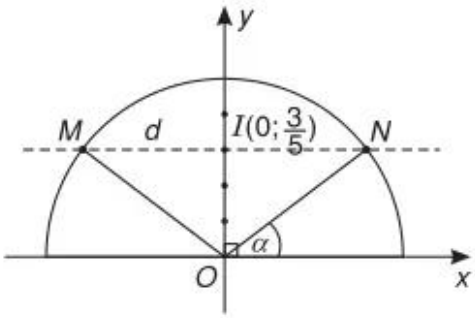
Tập sử dụng máy tính bỏ túi để xác định góc α.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xác định góc nhọn α biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

GIẢI

Cách 1. Trên trục Oy của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm $I = \left(0\,;\,\frac{3}{5}\right)$ và qua đó vẽ đường thẳng d song song với trục Ox (h.2.3).

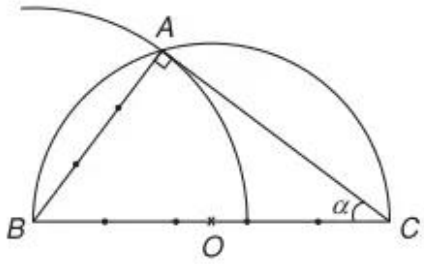


Hình 2.3

Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại hai điểm M và N trong đó $\widehat{xOM}$ là góc tù và $\widehat{xON}$ là góc nhọn. Ta xác định được góc $\alpha = \widehat{xON}$ có $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Cách 2. Ta dựng tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3$, $BC = 5$ (h.2.4).

Ta có $\alpha = \widehat{ACB}$ vì $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$.



Hình 2.4

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx-500MS).

• Chọn đơn vị đo : Sau khi mở máy ấn phím MODE nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ ứng với các số sau đây :

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Sau đó ấn phím 1 để xác định đơn vị đo góc là độ.

• Ta tính $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0,6$:

Ấn liên tiếp các phím sau đây :

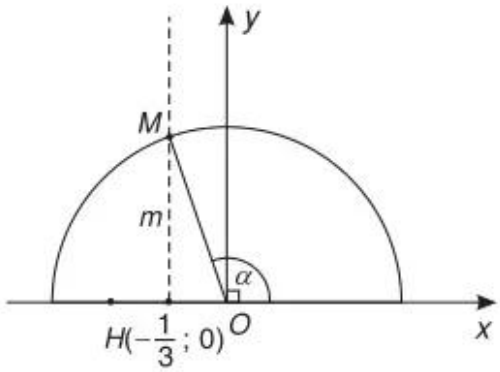
SHIFT sin⁻¹ sin 0 . 6 = 0 ''' '

Ta được kết quả là : $\alpha \approx 36^o52'11''$.

Ví dụ 2. Xác định góc α biết rằng $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

GIẢI

Cách 1. Trên trục Ox của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm $H = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ và qua đó vẽ đường thẳng m song song với trục Oy (h.2.5). Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại M. Ta có góc $\alpha = \widehat{xOM}$.



Hình 2.5

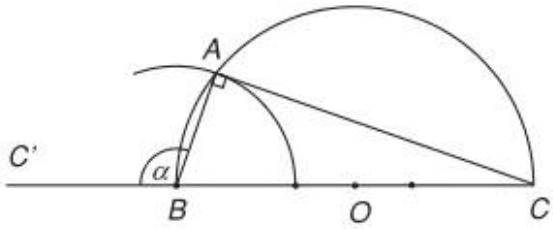
Cách 2. Ta biết rằng $\cos\alpha = -\cos(180^o - \alpha)$.

Theo giả thiết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, vậy $\cos(180^o - \alpha) = \frac{1}{3}$.

Ta dựng tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1$, $BC = 3$ (h.2.6).

Ta có $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{3}$ nên $\cos(180^o - \widehat{ABC}) = -\frac{1}{3}$.

Vậy $\alpha = 180^o - \widehat{ABC} = \widehat{ABC'}$ (tia BC' ngược hướng với tia BC).



Hình 2.6

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx-500MS)

Tương tự như tính $\sin\alpha$.

Vì $\cos\alpha < 0$ nên α là góc tù.

Ấn liên tiếp các phím sau đây :

Ta được kết quả là : $\alpha \approx 109^o28'16''$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Với những giá trị nào của góc α $(0^o \le \alpha \le 180^o)$ thì :

a) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ cùng dấu ? b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ khác dấu ?

c) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ cùng dấu ? d) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ khác dấu ?

2.2. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây :

a) 120° ; b) 150° ; c) 135°.

2.3. Tính giá trị của biểu thức :

a) $2\sin 30^o + 3\cos 45^o - \sin 60^o$; b) $2\cos 30^o + 3\sin 45^o - \cos 60^o$.

2.4. Rút gọn biểu thức :

a) $4a^2\cos^2 60^o + 2ab.\cos^2 180^o + \frac{4}{3}b^2\cos^2 30^o$;

b) $(a\sin 90^o + b\tan 45^o)(a\cos 0^o + b\cos 180^o)$.

2.5. Hãy tính và so sánh giá trị của từng cặp biểu thức sau đây :

a) $A = \cos^2 30^o - \sin^2 30^o$ và $B = \cos 60^o + \sin 45^o$;

b) $C = \dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$ và $D = (-\tan 135^o).\tan 60^o$.

2.6. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ với $90^o < \alpha < 180^o$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$.

2.7. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

2.8. Cho $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ với $0^o < \alpha < 90^o$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

2.9. Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

2.10. Biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$.

2.11. Chứng minh rằng với $0^o \le x \le 180^o$ ta có :

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$;

b) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$.

2.12. Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào α :

a) $A = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

b) $B = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. *Tích vô hướng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Lưu ý :

- Với $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^o = |\vec{a}|^2$.

2. Các tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có :

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối) ;

$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;

$\vec{a}^2 \geq 0$;

$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng toạ độ $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1\ ;\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1\ ;\ b_2)$.

Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là : $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

4. Ứng dụng của tích vô hướng

a) Tính độ dài của vectơ. Cho $\vec{a} = (a_1\ ;\ a_2)$, khi đó :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ .$$

b) Tính góc giữa hai vectơ. Cho $\vec{a} = (a_1\ ;\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1\ ;\ b_2)$, khi đó :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tính tích vô hướng của hai vectơ

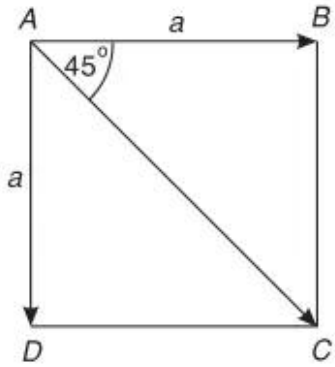
1. Phương pháp

- Áp dụng công thức của định nghĩa : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Dùng tính chất phân phối : $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*.

Tính tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.7

GIẢI

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\cos 90^o = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos 45^o$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ (h.2.7).

Ví dụ 2. Tam giác *ABC* vuông tại *C* có *AC* = 9, *CB* = 5. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

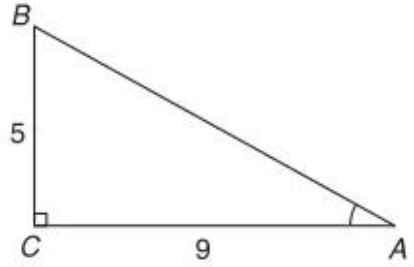
Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$,

trong đó $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{AC}{AB}$

(h.2.8).

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\dfrac{AC}{AB} = AC^2 = 9^2 = 81$.



Hình 2.8

Ví dụ 3. Tam giác *ABC* có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 60^o$ và *AB* = *a*. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

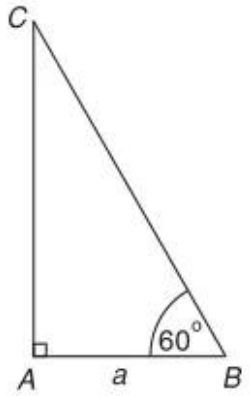
GIẢI

Ta có $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$ (h.2.9).

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos 90^o = 0$.

b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|\cos 30^o = a\sqrt{3}.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2$.

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|\cos 150^o = a\sqrt{3}.2a.\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.



Hình 2.9