CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

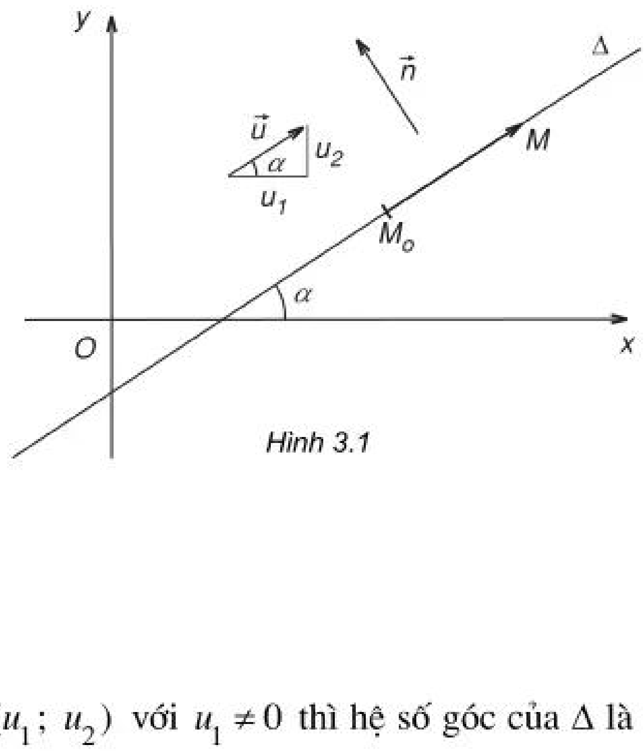
§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tham số (h.3.1)

• Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;\ u_2)$ là $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

$\left(u_1^2+u_2^2\neq 0\right)$ (h.3.1).



Hình 3.1

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ và có hệ số góc k là : $y-y_0=k(x-x_0)$.

• Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;\ u_2)$ với $u_1\neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k=\dfrac{u_2}{u_1}$.

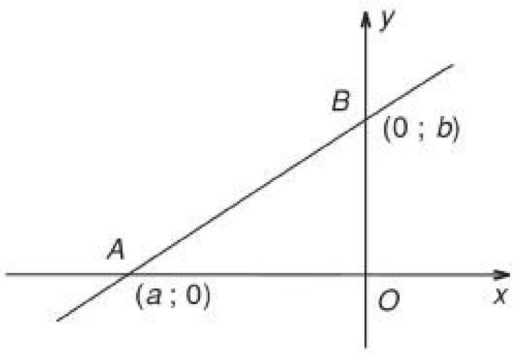
Nếu Δ có hệ số góc là k thì Δ có vectơ chỉ phương là : $\vec{u}=(1\ ;\ k)$.

2. Phương trình tổng quát

• Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a\,;\,b)$ là : $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad (a^2+b^2\neq 0)$.

• Phương trình $ax + by + c = 0$ với $a^2+b^2\neq 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng nhận $\vec{n} = (a\,;\,b)$ làm vectơ pháp tuyến.

• Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a\,;\,0)$ và $B(0\,;\,b)$ có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(a, b\neq 0)$ (h.3.2).



Hình 3.2

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$

$$\Delta_2 : a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ta xét số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

• Hệ (I) có một nghiệm : Δ_1 cắt Δ_2.

• Hệ (I) vô nghiệm : $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

• Hệ (I) có vô số nghiệm : $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

☞ ***Chú ý :*** Nếu $a_2b_2c_2\neq 0$ thì : • Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$;

• $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$;

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

4. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình cho ở mục 3, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ được tính bởi công thức :

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ đến đường thẳng Δ có phương trình : $ax+by+c=0$ được cho bởi công thức $d(M_0,\Delta) = \dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tham số của đường thẳng

1. Phương pháp

Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

– Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1\,;\,u_2)$ của đường thẳng Δ ;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ thuộc Δ ;

– Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2. \end{cases}$

☞ ***Chú ý***

– Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1\,;\,k)$.

– Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a\,;\,b)$ thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-b\,;\,a)$ hoặc $\vec{u}=(b\,;\,-a)$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(2 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4)$;

b) Δ đi qua điểm $M(5 ; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; -3)$.

GIẢI

a) Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t. \end{cases}$

b) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; -3)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4)$.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t. \end{cases}$

Ví dụ 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(5 ; 1)$ và có hệ số góc $k = 3$;

b) Δ đi qua hai điểm $A(3 ; 4)$ và $B(4 ; 2)$.

GIẢI

a) Δ có hệ số góc $k = 3$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; 3)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$

b) Δ đi qua A và B nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1 ; -2)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t. \end{cases}$

VẤN ĐỀ 2

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Phương pháp

Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

– Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\ ;\ b)$ của Δ ;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc Δ ;

– Viết phương trình Δ theo công thức : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$;

– Biến đổi về dạng : $ax + by + c = 0$.

☞ **Chú ý**

– Nếu đường thẳng Δ cùng phương với đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát : $ax + by + c' = 0$.

– Nếu đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát : $-bx + ay + c'' = 0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $M(3\ ;\ 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\ ;\ 2)$;

b) d đi qua điểm $M(3\ ;\ -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4\ ;\ 3)$.

GIẢI

a) Phương trình tổng quát của đường thẳng d có dạng

$$1.(x - 3) + 2.(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0.$$

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4\ ;\ 3)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3\ ;\ -4)$.

Vậy phương trình tổng quát của d có dạng :

$$3.(x - 3) - 4.(y + 2) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 4y - 17 = 0.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, biết $A(1\ ;\ 4)$, $B(3\ ;\ -1)$, $C(6\ ;\ 2)$. Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng chứa đường cao AH và trung tuyến AM của tam giác.

GIẢI

Đường cao AH có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (3\ ;\ 3)$ hoặc $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (1\ ;\ 1)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa AH là :

$$1.(x-1)+1.(y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y-5=0.$$

Ta tính được toạ độ trung điểm M của BC như sau :

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ta có $\quad \overrightarrow{AM}=\left(\frac{7}{2}\,;-\frac{7}{2}\right).$

Trung tuyến AM có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}=(1\,;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1\,;1)$. Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng chứa AM là :

$$(x-1)+(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-5=0.$$

☞ ***Chú ý.*** Tam giác ABC có đường cao AH trùng với trung tuyến AM nên tam giác ABC cân tại A.

VẤN ĐỀ 3

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1. Phương pháp

• Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

ta xét số nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Cụ thể :

Hệ (*) có nghiệm duy nhất : Δ_1 cắt Δ_2.

Hệ (*) vô nghiệm : $\Delta_1 // \Delta_2$.

Hệ (*) có vô số nghiệm : $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

• Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức :

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right) = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a) $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2 : x + y + 2 = 0$;

b) $d_3 : 12x - 6y + 10 = 0$ và $d_4 : 2x - y + 5 = 0$;

c) $d_5 : 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_6 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t. \end{cases}$

GIẢI

a) Ta có $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}\cdot$ Vậy d_1 cắt d_2.

b) Ta có $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} \neq \frac{10}{5}\cdot$ Vậy $d_3 // d_4$.

c) Phương trình tổng quát của d_6 là : $4x + 5y - 6 = 0$.

Ta có : $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{-6}{-12}\cdot$ Vậy $d_5 \equiv d_6$.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d_1 : x - 2y + 5 = 0$ và $d_2 : 3x - y = 0$.

a) Tìm giao điểm của d_1 và d_2 ;

b) Tính góc giữa d_1 và d_2.

GIẢI

a) Giao điểm của d_1 và d_2 là điểm có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm (1 ; 3).

b) $\cos\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=\dfrac{|3+2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Vậy $\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=45^{\circ}$.

VẤN ĐỀ 4

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp

• Để tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ ta dùng công thức

$$d(M_0,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

• Nếu đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng có bờ là Δ, ta luôn có :

– Một nửa mặt phẳng chứa các điểm $M_1(x_1;\ y_1)$ thoả mãn

$$\Delta(M_1)=ax_1+by_1+c>0\ ;$$

– Nửa mặt phẳng còn lại chứa các điểm $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ thoả mãn

$$\Delta(M_2)=ax_2+by_2+c<0.$$

• Cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1,\ \Delta_2$ có phương trình :

$$\Delta_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\Delta_2 : a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Gọi d và d' là hai đường thẳng chứa đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Ta có : $M(x, y) \in d \cup d'$

$$\Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Vậy phương trình của hai đường phân giác của các góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau :

a) $A(3 ; 5)$ và $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$;

b) $B(1 ; 2)$ và $\Delta' : 3x - 4y + 1 = 0$.

GIẢI

a) Ta có $d(A, \Delta) = \frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{28}{5}$.

b) $d(B, \Delta') = \frac{|3.1 - 4.2 + 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và hai điểm $O(0 ; 0)$, $A(2 ; 0)$.

a) Chứng tỏ rằng hai điểm A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Tìm điểm O' đối xứng của O qua Δ.

c) Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất.

GIẢI

a) Ta có $\Delta(A) = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$

$\Delta(O) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0$.

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ tại H. Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = t \\ y = -t. \end{cases}$

Vì $H \in d$ nên toạ độ của H có dạng $(x_H ; -x_H)$.

Mặt khác : $H \in \Delta \Rightarrow x_H - (-x_H) + 2 = 0 \Rightarrow x_H = -1$.

Vậy H có toạ độ là $(-1 ; 1)$.

Vì H là trung điểm của OO' nên $x_{O'} = 2x_H = -2$

$$y_{O'} = 2y_H = 2.$$

Vậy O' có toạ độ là $(-2 ; 2)$.

c) Ta có $OM + MA = O'M + MA$.

Độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất $\Leftrightarrow O', M, A$ thẳng hàng $\Leftrightarrow O'A$ cắt Δ tại M.

Phương trình đường thẳng $O'A$ là : $x + 2y - 2 = 0$.

Toạ độ của $M(x ; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy điểm $M\left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.1. Lập phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $A(-5 ; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4 ; -3)$;

b) d đi qua hai điểm $A(\sqrt{3} ; 1)$ và $B(2 + \sqrt{3} ; 4)$.

3.2. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t. \end{cases}$

a) Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm $A(0\ ;\ 1)$ một khoảng bằng 5.

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

c) Tìm điểm M trên Δ sao cho AM ngắn nhất.

3.3. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(1\ ;\ 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3\ ;\ -2)$;

b) Δ đi qua điểm $A(2\ ;\ -1)$ và có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{2}$;

c) Δ đi qua hai điểm $A(2\ ;\ 0)$ và $B(0\ ;\ -3)$.

3.4. Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1\ ;\ 0)$, $N(4\ ;\ 1)$, $P(2\ ;\ 4)$.

3.5. Cho điểm $M(1\ ;\ 2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng qua M và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

3.6. Cho tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng $AB : x - 3y + 11 = 0$, đường cao $AH : 3x + 7y - 15 = 0$, đường cao $BH : 3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

3.7. Cho tam giác ABC có $A(-2\ ;\ 3)$ và hai đường trung tuyến : $2x - y + 1 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

3.8. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc :

$\Delta_1 : mx + y + q = 0$ và $\Delta_2 : x - y + m = 0$?

3.9. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :

a) $d : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = 2 - 4t' ; \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d' : 2x + 4y - 10 = 0$;

c) $d : x + y - 2 = 0$ và $d' : 2x + y - 3 = 0$.

3.10. Tìm góc giữa hai đường thẳng :

$d_1 : x + 2y + 4 = 0$ và $d_2 : 2x - y + 6 = 0.$

3.11. Tính bán kính của đường tròn có tâm là điểm $I(1 ; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x - 3y + 1 = 0.$

3.12. Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x + 4y + 7 = 0$ và $\Delta_2 : x - 2y - 3 = 0.$

3.13. Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng :

$\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0.$

3.14. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2 ; 5)$ và cách đều hai điểm $A(-1 ; 2)$ và $B(5 ; 4).$