§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

3.15. a) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; b) $(x-2)^2+(y-3)^2=13$;

c) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; d) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$;

e) $(x-2)^2+(y-3)^2=1$.

3.16. a) Phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Ta có :

$A, B, C \in (\mathscr{C})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-8b+c=-17 \\ 14a-8b+c=-65 \\ -4a+10b+c=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \\ c=-31. \end{cases}$$

Vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ là : $x^2+y^2+6x+2y-31=0$.

b) $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $(-3\,;-1)$ và có bán kính bằng $\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{41}$.

3.17. a) Gọi $I\,(a\,;b)$ là tâm của $(\mathscr{C})$ ta có :

$$\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ I\in\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-3)^2 \\ 3a-b+10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=-8 \\ 3a-b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1. \end{cases}$$

Vậy $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-3\,;1)$.

b) $R=IA=\sqrt{(-1+3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$.

c) Phương trình của $(\mathscr{C})$ là : $(x+3)^2+(y-1)^2=5$.

3.18. a) $x - y - 7 = 0$ (d) hay $x + y - \frac{9}{7} = 0$ (d').

b) $I_1\left(\frac{8}{3}\ ;\ -\frac{13}{3}\right)$, $I_2\left(-\frac{2}{7}\ ;\ \frac{11}{7}\right)$.

c) $(\mathscr{C}_1): \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$

$(\mathscr{C}_2): \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2$.

3.19. $(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$;

$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.

3.20. a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - x + y - 4 = 0$.

3.21. Phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, ta có :

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (4-a)^2 + (2-a)^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 10. \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài là :

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ và $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$.

3.22. a) $M_1(1\ ;\ 0)$, $M_2(-3\ ;\ 3)$.

b) $\Delta_1 : x - 7y - 1 = 0$; $\Delta_2 : 7x + y + 18 = 0$.

c) $A\left(-\frac{5}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

3.23. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3\ ;\ -1)$ và có bán kính $R = 2$, ta có :

$$IA = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$IA > R$, vậy A nằm ngoài $(\mathscr{C})$.

b) $\Delta_1 : 3x + 4y - 15 = 0$; $\Delta_2 : x - 1 = 0$.

3.24. Δ vuông góc với d nên phương trình Δ có dạng : $x + 3y + c = 0$.

($\mathscr{C}$) có tâm $I(3 ; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{10}$. Ta có :

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I ; \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3-3+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow c = \pm 10$.

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn đề bài là :

$\Delta_1 : x + 3y + 10 = 0$ và $\Delta_2 : x + 3y - 10 = 0$.

3.25. a) ($\mathscr{C}$) có tâm $I(-1 ; 2)$ và có bán kính $R = 3$. Đường thẳng Δ đi qua $M(2 ; -1)$ và có hệ số góc k có phương trình :

$$y + 1 = k(x - 2) \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0.$$

Ta có : Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-k-2-2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |k+1| = \sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Vậy ta được tiếp tuyến $\Delta_1 : y + 1 = 0$.

Xét đường thẳng Δ_2 đi qua $M(2 ; -1)$ và vuông góc với Ox, Δ_2 có phương trình $x - 2 = 0$. Ta có $d(I, \Delta_2) = |-1-2| = 3 = R$.

Suy ra Δ_2 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$).

Vậy qua điểm M ta vẽ được hai tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$), đó là :

$\Delta_1 : y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : x - 2 = 0$.

b) Δ_1 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) tại $M_1(-1 ; -1)$;

Δ_2 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) tại $M_2\,(2 ; 2)$.

Phương trình của đường thẳng d đi qua M_1 và M_2 là : $x - y = 0$.

3.26. Đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ có tâm $I(4 ; 3)$ và có bán kính $R = 5$.

Cách 1 : Xét đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và có hệ số góc k, Δ có phương trình $y - kx = 0$.

Ta có : Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$$

$$\Leftrightarrow (3-4k)^2 = 25(k^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 16k^2 - 24k = 25k^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 24k + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

Vậy ta được phương trình tiếp tuyến là : $y + \frac{4}{3}x = 0$ hay $4x + 3y = 0$.

Cách 2 : Do toạ độ $O(0 ; 0)$ thoả mãn phương trình của $(\mathscr{C})$ nên điểm O nằm trên $(\mathscr{C})$. Tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại O có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{OI} = (4 ; 3)$.

Suy ra Δ có phương trình

$$4x + 3y = 0.$$

3.27. a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(3 ; 0)$ và có bán kính $R_1 = 2$;

$(\mathscr{C}_2)$ có tâm $I_2(6 ; 3)$ và có bán kính $R_2 = 1$.

b) Xét đường thẳng Δ có phương trình :

$y = kx + m$ hay $kx - y + m = 0$. Ta có :

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3k+m|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 & (1) \\ \dfrac{|6k-3+m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$|3k+m| = 2|6k-3+m|.$$

Trường hợp 1. $3k + m = 2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow m = 6 - 9k.$ (3)

Thay vào (2) ta được

$$|6k-3+6-9k| = \sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow |3-3k| = \sqrt{k^2+1}$$
$$\Leftrightarrow 9 - 18k + 9k^2 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow 8k^2 - 18k + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4k^2 - 9k + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{9+\sqrt{17}}{8} \\ k_2 = \dfrac{9-\sqrt{17}}{8}. \end{array}\right.$$

Thay giá trị của k vào (3) ta tính được

$$\left[\begin{array}{l} m_1 = 6 - 9k_1 \\ m_2 = 6 - 9k_2. \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai tiếp tuyến

$$\Delta_1 : y = k_1x + 6 - 9k_1 ;$$
$$\Delta_2 : y = k_2x + 6 - 9k_2.$$

Trường hợp 2. $3k + m = -2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow 3m = 6 - 15k$

$\Leftrightarrow m = 2 - 5k.$ (4)

Thay vào (2) ta được

$$|6k-3+2-5k| = \sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow |k-1| = \sqrt{k^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (k-1)^2 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Thay giá trị của k vào (4) ta được $m = 2$.

Vậy ta được tiếp tuyến

$$\Delta_3 : y = 2.$$

Xét đường thẳng Δ_4 vuông góc với Ox tại x_0 :

$$\Delta_4 : x - x_0 = 0.$$

Δ_4 tiếp xúc với ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1,\Delta_4)=R_1 \\ d(I_2,\Delta_4)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3-x_0|=2 \\ |6-x_0|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \vee x_0=5 \\ x_0=5 \vee x_0=7 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=5.$$

Vậy ta được tiếp tuyến $\Delta_4 : x-5=0$.

Tóm lại hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) có bốn tiếp tuyến chung $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ và Δ_4.