§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

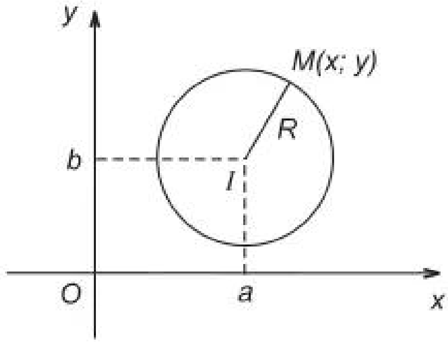
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường tròn (h.3.3)

• Phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính R là :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

• Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.



Hình 3.3

• Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì chỉ có một điểm $I(a\ ;\ b)$ thoả mãn phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

• Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì không có điểm $M(x\ ;\ y)$ nào thoả mãn phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

2. *Phương trình tiếp tuyến của đường tròn*

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ của đường tròn tâm $I(a\ ;b)$ có phương trình :

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Nhận dạng một phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

1. *Phương pháp*

Cách 1 : – Đưa phương trình về dạng :

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0. \qquad (1)$$

– Xét dấu biểu thức $m=a^2+b^2-c$.

– Nếu $m>0$ thì (1) là phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Cách 2 : – Đưa phương trình về dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2=m. \qquad (2)$$

– Nếu $m>0$ thì (2) là phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R=\sqrt{m}$.

2. *Các ví dụ*

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn ? Tìm tâm và bán kính nếu có :

a) $x^2+y^2-6x+8y+100=0 \qquad (1)$

b) $x^2+y^2+4x-6y-12=0 \qquad (2)$

c) $2x^2+2y^2-4x+8y-2=0. \qquad (3)$

GIẢI

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = 3$, $b = -4$, $c = 100$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - 100 < 0$.

Vậy (1) không phải là phương trình của đường tròn.

b) (2) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = -2$, $b = 3$, $c = -12$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 + 12 = 25 > 0$.

Vậy (2) là phương trình của đường tròn tâm là điểm $(-2\ ;\ 3)$, bán kính bằng $\sqrt{a^2 + b^2 - c} = 5$.

c) Ta có : (3) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{6})^2$$

Vậy (3) là phương trình của đường tròn tâm là điểm $(1\ ;\ -2)$, bán kính bằng $\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$. (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của đường tròn ?

b) Nếu (1) là phương trình của đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn đó theo m.

GIẢI

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m$, $b = -2m$, $c = 6m - 1$.

(1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$, mà

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1}{5} \\ m > 1. \end{array}\right.$$

b) Khi $m < \dfrac{1}{5} \vee m > 1$ thì (1) là phương trình của đường tròn tâm $I(m\ ;\ -2m)$ và có bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 6m + 1}$.

VẤN ĐỀ 2

Lập phương trình của đường tròn

1. Phương pháp

Cách 1 :

– Tìm toạ độ tâm $I(a\,;\,b)$ của đường tròn $(\mathscr{C})$;

– Tìm bán kính R của $(\mathscr{C})$;

– Viết phương trình $(\mathscr{C})$ theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. (1)

☞ ***Chú ý***

– $(\mathscr{C})$ đi qua $A, B \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = R^2$.

– $(\mathscr{C})$ đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I, \Delta)$.

– $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$.

Cách 2 :

– Gọi phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (2)

– Từ điều kiện của đề bài đưa đến hệ phương trình với ẩn số là a, b, c.

– Giải hệ phương trình tìm a, b, c thế vào (2) ta được phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ trong các trường hợp sau :

a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1\,;\,2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x - 2y + 7 = 0$;

b) $(\mathscr{C})$ có đường kính là AB với $A(1\,;\,1)$, $B(7\,;\,5)$.

GIẢI

a) Ta có $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ là : $(x+1)^2+(y-2)^2 = \dfrac{4}{5}$.

b) Tâm I của $(\mathscr{C})$ là trung điểm của AB.

Ta có : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Do đó : $IA = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}.$

Vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ là : $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13.$

Ví dụ 2. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,2)$, $C(1\,;\,-3)$.

GIẢI

Xét đường tròn $(\mathscr{C})$ có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$

$(\mathscr{C})$ đi qua A, B, C khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1+4-2a-4b+c=0 \\ 25+4-10a-4b+c=0 \\ 1+9-2a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-c=5 \\ 10a+4b-c=29 \\ 2a-6b-c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-1. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là :

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$$

Vấn đề 3

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

1. Phương pháp

Loại 1. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$.

– Tìm toạ độ tâm $I(a\,;\,b)$ của $(\mathscr{C})$.

– Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại $M_0(x_0\,;\,y_0)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Loại 2. Lập phương trình tiếp tuyến Δ với ($\mathscr{C}$) khi chưa biết tiếp điểm :

Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định Δ :

Δ tiếp xúc với đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm I, bán kính $R \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

tại điểm $M_0(4 ; 2)$ thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$).

GIẢI

($\mathscr{C}$) có tâm là điểm $(1 ; -2)$. Vậy phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại $M_0(4 ; 2)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-1)(x-4) + (2+2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0.$$

Ví dụ 2. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(3 ; -2)$.

GIẢI

Phương trình của đường thẳng Δ đi qua $A(3 ; -2)$ có dạng

$$y + 2 = k(x-3) \Leftrightarrow kx - y - 2 - 3k = 0.$$

($\mathscr{C}$) có tâm $I(2 ; 1)$ và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4+1-0} = \sqrt{5}$.

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2k-1-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (3+k)^2 = 5(k^2+1) \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) kẻ từ A là : $\Delta_1 : 2x - y - 8 = 0$;

$\Delta_2 : x + 2y + 1 = 0.$

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$$

biết rằng Δ song song với đường thẳng $d : 3x - y + 2006 = 0$.

GIẢI

($\mathscr{C}$) có tâm $I(2 ; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Phương trình của đường thẳng Δ song song với d có dạng :

$$\Delta : 3x - y + c = 0.$$

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|6 + 3 + c|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c + 9| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -19. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình của Δ là $3x - y + 1 = 0$ hay $3x - y - 19 = 0$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.15. Trong mặt phẳng Oxy, hãy lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là điểm $(2 ; 3)$ và thoả mãn điều kiện sau :

a) ($\mathscr{C}$) có bán kính là 5 ;

b) ($\mathscr{C}$) đi qua gốc toạ độ ;

c) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với trục Ox ;

d) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với trục Oy ;

e) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$.

3.16. Cho ba điểm $A(1 ; 4)$, $B(-7 ; 4)$, $C(2 ; -5)$.

a) Lập phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) ngoại tiếp tam giác ABC ;

b) Tìm tâm và bán kính của ($\mathscr{C}$).

3.17. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua hai điểm $A(-1 ; 2)$, $B(-2 ; 3)$ và có tâm ở trên đường thẳng $\Delta : 3x - y + 10 = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm của ($\mathscr{C}$) ;

b) Tính bán kính R của ($\mathscr{C}$) ;

c) Viết phương trình của ($\mathscr{C}$).

3.18. Cho ba đường thẳng $\Delta_1 : 3x + 4y - 1 = 0$;

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 8 = 0 ;$$

$$d : 2x + y - 1 = 0.$$

a) Lập phương trình các đường phân giác của các góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2.

b) Xác định toạ độ tâm I của đường tròn ($\mathscr{C}$) biết rằng I nằm trên d và ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2.

c) Viết phương trình của ($\mathscr{C}$).

3.19. Lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua hai điểm $A(1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 3 = 0$.

3.20. Lập phương trình của đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau :

a) A có toạ độ $(-1 ; 1)$, B có toạ độ $(5 ; 3)$;

b) A có toạ độ $(-1 ; -2)$, B có toạ độ $(2 ; 1)$.

3.21. Lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với các trục toạ độ và đi qua điểm $M(4 ; 2)$.

3.22. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ và đường thẳng $d : 3x + 4y - 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của ($\mathscr{C}$) và d.

b) Lập phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại các giao điểm đó.

c) Tìm toạ độ giao điểm của hai tiếp tuyến.

3.23. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm $A(1 ; 3)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm A nằm ngoài đường tròn ($\mathscr{C}$).

b) Lập phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) xuất phát từ điểm A.

3.24. Lập phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ biết rằng Δ vuông góc với đường thẳng $d : 3x - y + 4 = 0$.

3.25. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ và điểm $M(2 ; -1)$.

a) Chứng tỏ rằng qua M ta vẽ được hai tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2 với $(\mathscr{C})$. Hãy viết phương trình của Δ_1 và Δ_2.

b) Gọi M_1 và M_2 lần lượt là hai tiếp điểm của Δ_1 và Δ_2 với $(\mathscr{C})$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua M_1 và M_2.

3.26. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua gốc toạ độ O.

3.27. Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

và $(\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$.

a) Tìm tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

b) Lập phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.