§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

2.13. Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do đó $\vec{a}.\vec{b} > 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) > 0$ nghĩa là $0 \le (\vec{a},\vec{b}) < 90^o$

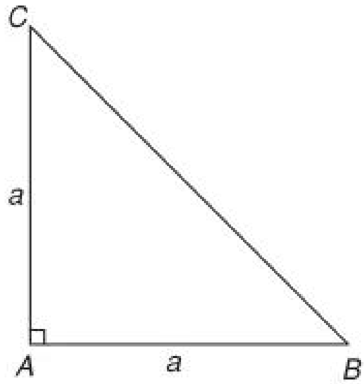
$\vec{a}.\vec{b} < 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) < 0$ nghĩa là $90^o < (\vec{a},\vec{b}) \le 180^o$

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$ nghĩa là $(\vec{a},\vec{b}) = 90^o$.

2.14. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

Các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.



Hình 2.20

2.15. (h.2.20) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a.a\sqrt{2}.\cos 45^o = a^2$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a.a\sqrt{2}.\cos 135^o = -a^2$.

2.16. a) Ta có $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2} = 20$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = 5.8.\cos A = 20$,

suy ra $\cos A = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^o$.

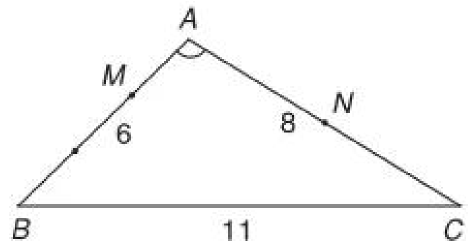
b) Ta có $BA^2 = \overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Do đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - BA^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = 44$.

2.17. (h.2.21) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 6^2 - 11^2) = -\frac{21}{2}$

$$= AB.AC.\cos A = -\frac{21}{2} \Rightarrow \text{góc } A \text{ tù.}$$

b) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Hình 2.21

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{6}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{6}.\left(-\frac{21}{2}\right) = -\frac{7}{4}.$$

2.18. (h.2.22) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$ vì M là trung điểm của đoạn HD.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$

Do đó $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD})$

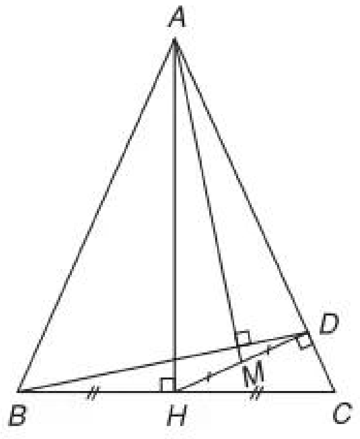
$$= \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{=0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}).\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{HD}.\underbrace{(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH})}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC} = 0.$$



Hình 2.22

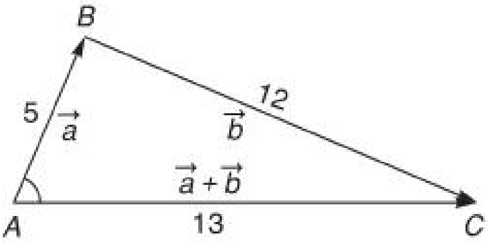
Vậy AM vuông góc với BD.

2.19. (h.2.23) Dựng tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 12$ và $AC = 13$.

Ta có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$

và $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Khi đó $\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.23

Mặt khác ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$$

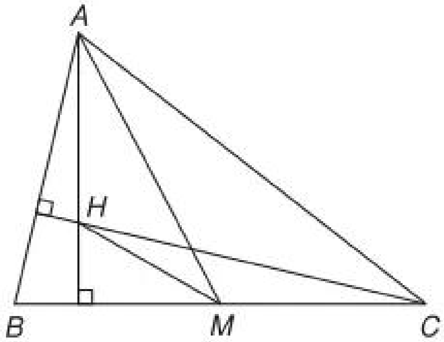
$$= \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25.$$

Ta suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{25}{5.13} \approx 0,3846.$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 67^o23'$.

2.20. (h.2.24) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$



Hình 2.24

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}}_{=0} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})\right]$$

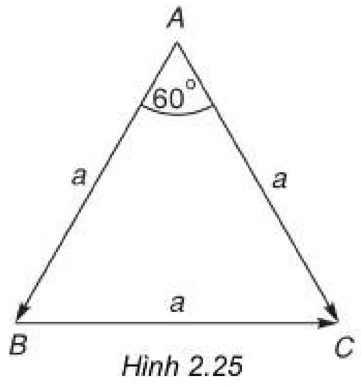
$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}}_{0} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{CB}}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2.$$

2.21. (h.2.25) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a.a.\cos 120^{\circ} = -\frac{1}{2}a^2$.



Hình 2.25

2.22. (h.2.26) Ta có

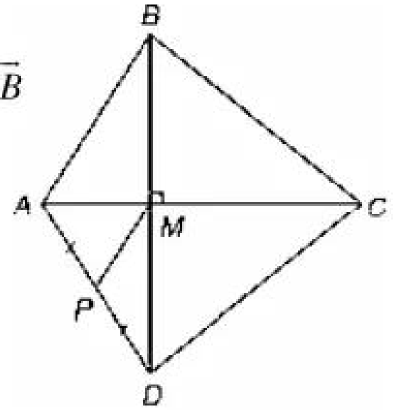
$$2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}}_{0} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}.$$

Do đó $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$.



Hình 2.26

2.23. (h.2.27) a) Vì *ABCD* là hình bình hành nên ta có

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ trong đó $\overrightarrow{BA} = (5\,;\,3)$

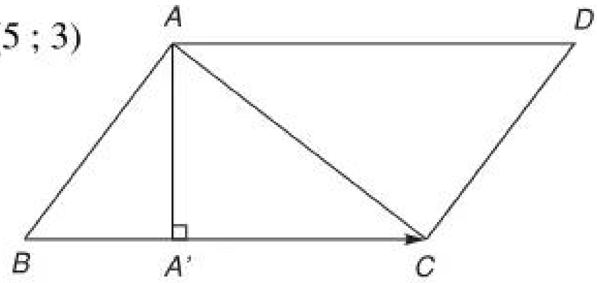
$\overrightarrow{BC} = (6\,;\,-2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = (11\,;\,1)$.

Giả sử D có toạ độ $(x_D\,;\,y_D)$.

Vì $\overrightarrow{BD} = (11\,;\,1)$ và $B(-3\,;\,1)$ nên ta có :

$$\begin{cases} x_D + 3 = 11 \\ y_D - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 2. \end{cases}$$



Hình 2.27

☞ ***Chú ý :*** Ta có thể dựa vào biểu thức vectơ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ hoặc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ để tính toạ độ điểm D.

b) Gọi $A'(x\,;\,y)$ là chân đường cao vẽ từ A ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \text{ hay } \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

với $\overrightarrow{AA'} = (x-2\ ;\ y-4)$, $\overrightarrow{BC} = (6\ ;-2)$, $\overrightarrow{BA'} = (x+3\ ;\ y-1)$.

Do đó :

$$\begin{cases}(x-2).6+(y-4).(-2)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}\\ -2(x+3)-6(y-1)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6x-12-2y+8=0\\ -2x-6-6y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-2y-4=0\\ -2x-6y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{A'}=\dfrac{3}{5}\\ y_{A'}=-\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

2.24. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(2\ ;\ -2)$. Do đó :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2.2 + 2.(-2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

2.25. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{DC}=(3\ ;\ 3)$. Vậy $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$, ta suy ra DC // AB và $DC = 3AB$.

Mặt khác $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2+3^2}$ và $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2+1^2}$

nên $ABCD$ là hình thang cân có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, còn hai đáy là AB và CD trong đó đáy lớn CD dài gấp 3 lần đáy nhỏ AB.

2.26. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(7\ ;\ 1)$.

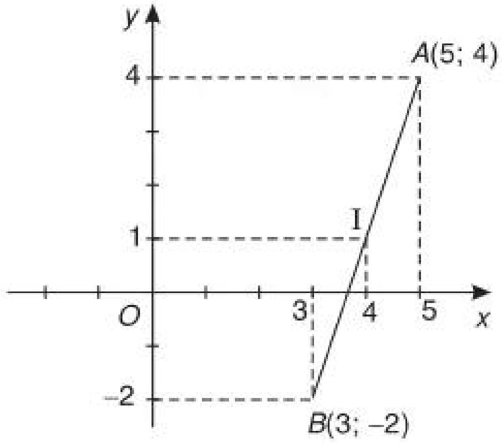
Vì $\dfrac{4}{7} \neq \dfrac{2}{1}$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|}$ với $\overrightarrow{BA}=(-4\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{BC}=(3\ ;\ -1)$.

Do đó $\cos B = \dfrac{(-4.3)+(-2).(-1)}{\sqrt{16+4}.\sqrt{9+1}} = \dfrac{-10}{\sqrt{200}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{B} = 135^{o}$.

2.27. (h.2.28) Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $I(4\ ;\ 1)$.



Hình 2.28

Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi giá trị của đoạn IM nhỏ nhất. Điểm M chạy trên trục Ox nên có toạ độ dạng $M(x\ ;\ 0)$. Do đó :

$\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{(x-4)^2+1}\geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ là 2 khi M có toạ độ là $M(4\ ;\ 0)$.

2.28. Muốn chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, ta chứng minh tứ giác này có hai góc đối bù nhau. Khi đó hai góc này có côsin đối nhau.

Theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{AB}=(1\ ;-3)\ ;\ \overrightarrow{AD}=(-4\ ;\ 2)\ ;\ \overrightarrow{CB}=(2\ ;\ 4)\ ;\ \overrightarrow{CD}=(-3\ ;\ 9).$$

Do đó $$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{1.(-4)+(-3).2}{\sqrt{1+9}.\sqrt{16+4}}=\frac{-10}{\sqrt{200}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{2.(-3)+4.9}{\sqrt{4+16}.\sqrt{9+81}}=\frac{30}{\sqrt{1800}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$ nên hai góc này bù nhau. Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.