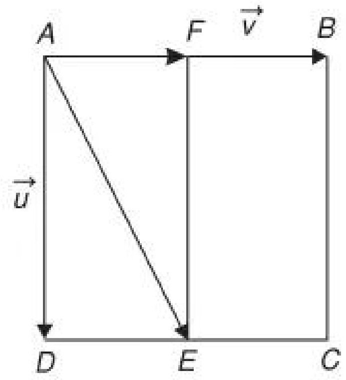
1.58. (h.1.70) Gọi F là trung điểm của cạnh AB. Ta có

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Vậy $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.



Hình 1.70

1.59. $\overline{AB} = -8$, $\overline{BA} = 8$, $\overline{AC} = -9$, $\overline{BC} = -1$.

1.60. (Xem h.1.71)

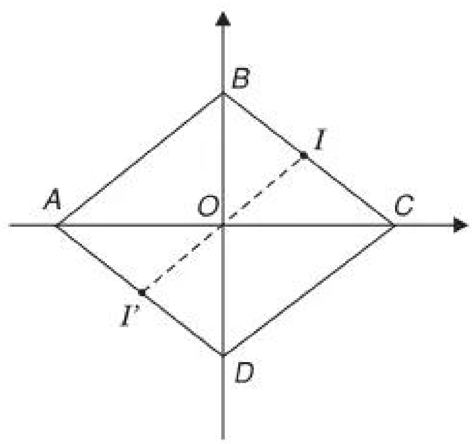
a) $A(-4\ ;\ 0)$, $C(4\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 3)$, $D(0\ ;\ -3)$.

b) $I\left(2\ ;\ \frac{3}{2}\right)$, $G(0\ ;\ 1)$.

c) $I'\left(-2\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AI'} = \left(2\ ;\ -\frac{3}{2}\right),\ \overrightarrow{AD} = (4\ ;\ -3).$$

Vậy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI'}$. Suy ra ba điểm A, I', D thẳng hàng.



Hình 1.71

d) $\overrightarrow{AC} = (8\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{BD} = (0\ ;\ -6)$, $\overrightarrow{BC} = (4\ ;\ -3)$.

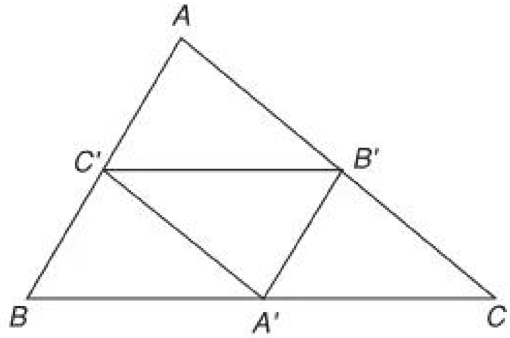
II- ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

1.61. (Xem hình 1.72)

a) $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \begin{cases} x_A - 2 = 6 \\ y_A + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 8 \\ y_A = 1 \end{cases}$

$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \begin{cases} -4 - x_B = 0 \\ 1 - y_B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -4 \\ y_B = -5 \end{cases}$

$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \begin{cases} x_C + 4 = 0 \\ y_C - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = 7 \end{cases}$



Hình 1.72

b) Tính toạ độ trọng tâm G, G' của tam giác ABC và $A'B'C'$ ta được $G(0 ; 1)$ và $G'(0 ; 1)$.

Vậy $G \equiv G'$.

1.62. a) $\vec{a}+\vec{b} = (3 ; 2)$, $\quad \vec{a}-\vec{b} = (1 ; -6)$, $\quad 2\vec{a}+3\vec{b} = (7 ; 8)$.

b) Giả sử $\vec{c} = h\vec{a}+k\vec{b}$. Khi đó

$$\begin{cases} 2h+k=5 \\ -2h+4k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=2 \\ k=1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a}+\vec{b}$.

1.63. a) $\vec{u} = (3.2 + 2.3 - 4.(-7) ; 3.1 + 2.(-4) - 4.2)$

$\vec{u} = (40 ; -13)$.

b) $\vec{x} = \vec{b}-\vec{c}-\vec{a} = (8 ; -7)$.

c) $k\vec{a}+h\vec{b} = (2k + 3h ; k - 4h)$

$$\vec{c} = k\vec{a}+h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+3h=-7 \\ k-4h=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ h=-1. \end{cases}$$

1.64. (Xem hình 1.73)

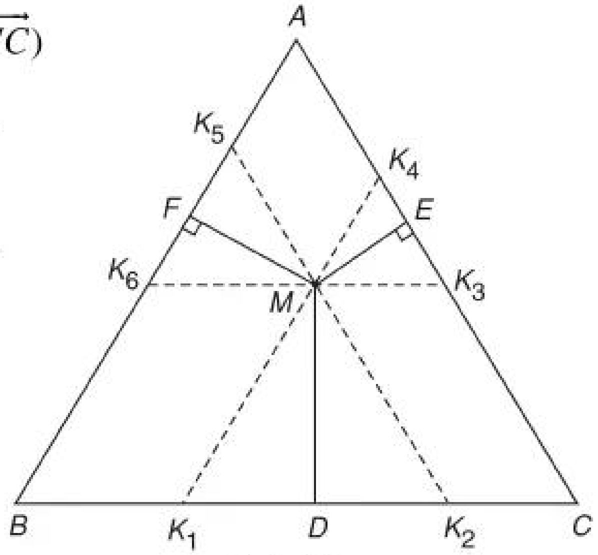
Qua M kẻ các đường thẳng sau : K_1K_4 // AB, K_2K_5 // AC, K_3K_6 // BC ($K_1, K_2 \in BC$; $K_3, K_4 \in AC$; $K_5, K_6 \in AB$). Ta có :

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4}+\overrightarrow{MK_5}+\overrightarrow{MK_6})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$$

(Vì MK_5AK_4, MK_3CK_2, MK_1BK_6 là các hình bình hành). Vậy

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}.3\overrightarrow{MO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



Hình 1.73

1.65. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác MPR và NQS. Ta có

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF})=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'Q}+\overrightarrow{G'S}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}+\overrightarrow{G'A})=\vec{0}.$$

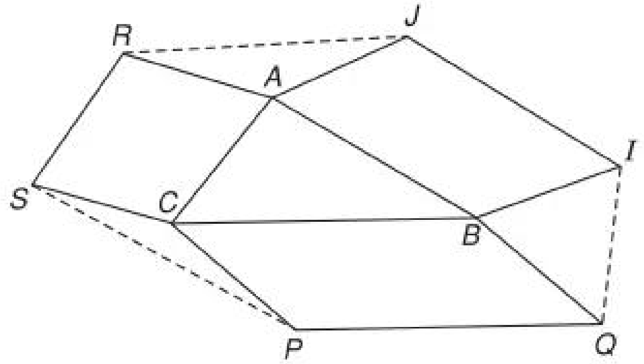
Do đó

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}$$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{GG'}=\vec{0} \Rightarrow G\equiv G'.$$

1.66. (Xem hình 1.74)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}\\ &=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})+(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})\\ &=\vec{0}.\end{aligned}$$

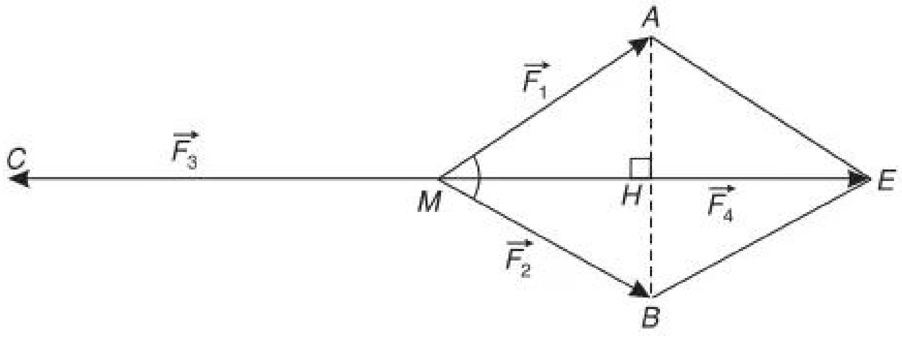


Hình 1.74

1.67. (Xem hình 1.75)

a) Vật đứng yên là do $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$.

Vẽ hình thoi $MAEB$ ta có : $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\overrightarrow{ME}$.



Hình 1.75

Tam giác MAB là tam giác đều có đường cao $MH = \dfrac{100\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $ME = 100\sqrt{3}$.

b) Lực $\overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{ME}$ có cường độ là $100\sqrt{3}$ N.

Ta có $\overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$, do đó $\overrightarrow{F_3}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{F_4}$. Như vậy $\overrightarrow{F_3}$ có cường độ là $100\sqrt{3}$ N và ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{ME}$.

1.68. (Xem hình 1.76)

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

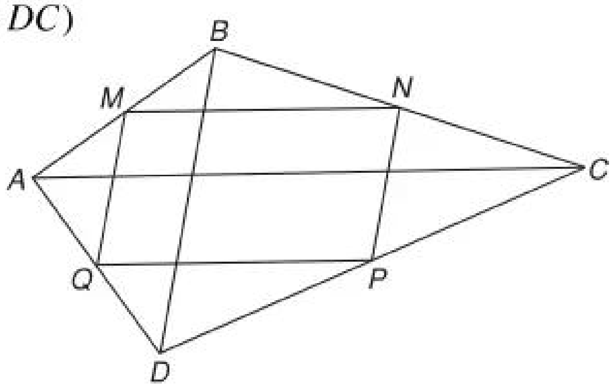
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

b) Tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MN \,//\, QP \\ MN = QP \end{cases}$

suy ra MNPQ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}$.



Hình 1.76

1.69. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;4)$, $\overrightarrow{AC} = (6\,;8) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Vậy A, B, C thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{MN} = (2\,;4)$; $\overrightarrow{MP} = (3\,;3)$, mà $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{4}{3}$.

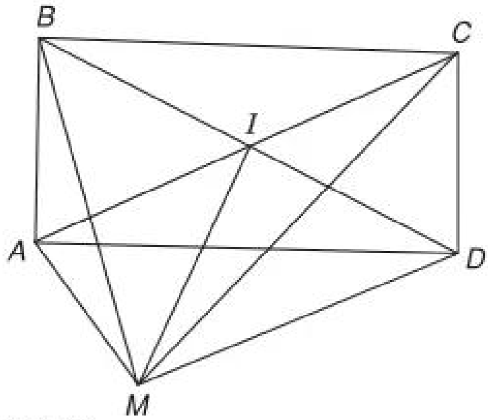
Vậy M, N, P không thẳng hàng.

1.70. (Xem hình 1.77)

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.



Hình 1.77

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=DB$.

Vì hai đường chéo của hình chữ nhật dài bằng nhau nên

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

1.71. (Xem hình 1.78)

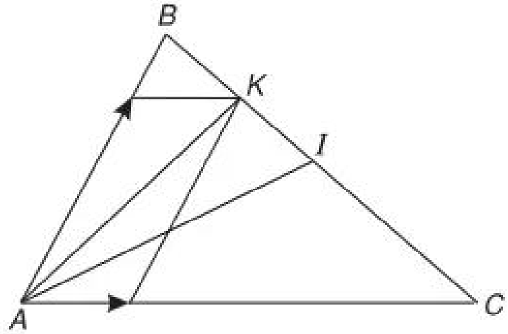
a) Vì K là trung điểm của BI nên $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI})$ (1)

b) Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})]$

$\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.



Hình 1.78

1.72. (Xem hình 1.79)

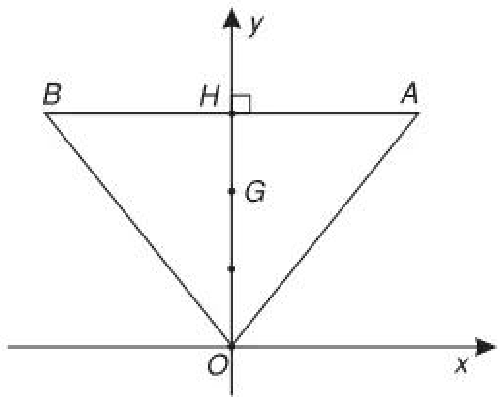
a) Gọi H là trung điểm AB ta có

$OH=\frac{OA\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; $HA=\frac{OA}{2}=1$.

Vậy ta có $A(1\ ;\ \sqrt{3})$ và $B(-1\ ;\ \sqrt{3})$.

b) $OG=\frac{2}{3}OH=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Vậy ta có $G\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.



Hình 1.79

III- ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1

Câu 1. a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO})$

$=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 2. a) $\vec{a} = (2 ; 3)$; b) $\vec{b} = (5 ; -1)$; c) $\vec{m} = (0 ; -4)$.

Câu 3. a) $\vec{a} = (-2 ; 0) = -2(1 ; 0) = -2\overrightarrow{e_1}$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{e_1}$ ngược hướng. Vậy mệnh đề a) đúng.

b) Đúng.

c) Sai.

Câu 4. *ABCD* là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-1=-4-3 \\ y_D+2=1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-6 \\ y_D=-3. \end{cases}$$

Vậy $D(-6 ; -3)$.

Đề 2

Câu 1. a) $A(4 ; -3)$; b) $B(-4 ; 3)$; c) $C(-4 ; -3)$.

Câu 2. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng.

Câu 3. a) $\vec{a} = (12 ; 7)$; b) $\vec{b} = (1 ; -9)$;

c) $\vec{c} = (m ; 10)$, $\vec{v} = (2 ; 5)$

$\vec{c}$ cùng phương với $\vec{v}$ $\Leftrightarrow \dfrac{m}{2}=\dfrac{10}{5} \Leftrightarrow m=4$.

Câu 4. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1 ; m-2)$.

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{1}{-3}=\frac{m-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3m+6=2$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}.$$

Đề 3

Câu 1. a) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$;

c) $x = \frac{3}{7}$.

Câu 2. a) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

b) $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{OC}{OB}\overrightarrow{OB} + \frac{OD}{OA}\overrightarrow{OA}\right)$

$= \frac{1}{2}(k.\overrightarrow{OB} + k.\overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$ cùng phương $\Rightarrow O, I, J$ thẳng hàng.

Câu 3. a) $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BC}$ (I' là trung điểm AB). Suy ra I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $I'CBI$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN} \Rightarrow MN$ qua điểm I cố định.

Câu 4. $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

$= 3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$

$\vec{u} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ (không đổi).

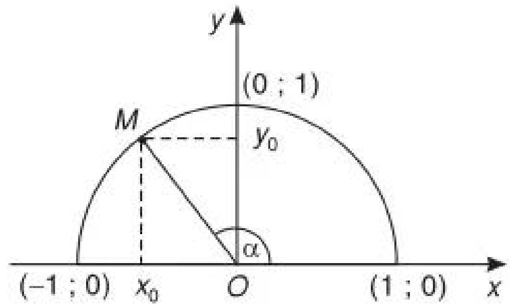
CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^{O} ĐẾN 180^{O}

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Với mỗi góc α ($0^{o} \leq \alpha \leq 180^{o}$) ta xác định được một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị (h. 2.1) sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ là $M(x_0 ; y_0)$. Khi đó :



Hình 2.1

• Tung độ y_0 của điểm M gọi là *sin của góc* α và được kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$.

• Hoành độ x_0 của điểm M gọi là *côsin của góc* α và được kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$.

• Tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}$ với $x_0 \neq 0$ gọi là *tang của góc* α và được kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$.

• Tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}$ với $y_0 \neq 0$ gọi là *côtang của góc* α và được kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

2. *Các hệ thức lượng giác*

a) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

$$\sin\alpha = \sin(180^o - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(180^o - \alpha)$$
$$\tan\alpha = -\tan(180^o - \alpha)$$
$$\cot\alpha = -\cot(180^o - \alpha).$$

b) Các hệ thức lượng giác cơ bản

Từ định nghĩa giá trị lượng giác của góc α ta suy ra các hệ thức :

■ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

■ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha\ (\alpha \neq 90^o)$; $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha\ (\alpha \neq 0^o\ ;\ 180^o)$;

■ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$; $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$;

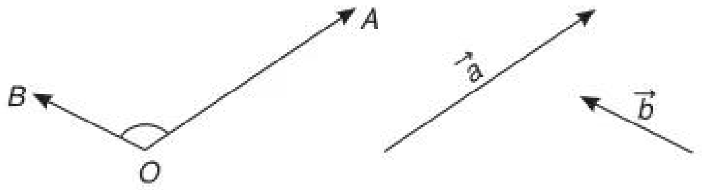
■ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

3. *Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt*

Giá trị lượng giác \ α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	0
$\cot\alpha$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\|\|$

4. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^o đến 180^o được gọi là *góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$* (h.2.2) và kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.2

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tính giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

1. Phương pháp

• Dựa vào định nghĩa, tìm tung độ y_0 và hoành độ x_0 của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị với góc $\widehat{xOM} = \alpha$ và từ đó ta có các giá trị lượng giác :

$$\sin\alpha = y_0 \ ; \ \cos\alpha = x_0 \ ; \ \tan\alpha = \frac{y_0}{x_0} \ ; \ \cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

• Dựa vào tính chất : Hai góc bù nhau có sin bằng nhau và có côsin, tang, côtang đối nhau.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho góc $\alpha = 135^o$. Hãy tính sin α, cos α, tan α và cot α.

GIẢI

Ta có $\sin 135^o = \sin(180^o - 135^o) = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 135^o = -\cos(180^o - 135^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ ;$$