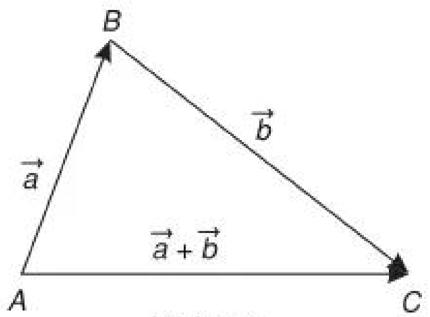
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

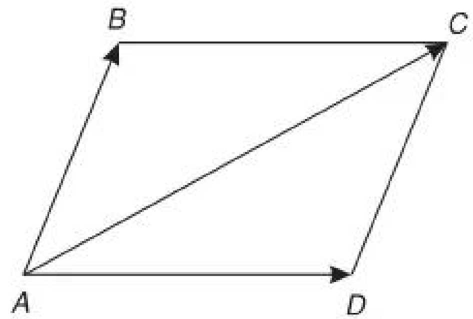
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tổng của hai vectơ và quy tắc tìm tổng

- Cho hai vectơ tuỳ ý $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy điểm A tuỳ ý, dựng $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (h.1.7).
- Với ba điểm M, N và P tuỳ ý ta luôn có :
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ (quy tắc ba điểm)
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có (h.1.8) :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).



Hình 1.7



Hình 1.8

2. Định nghĩa vectơ đối

- Vectơ $\vec{b}$ là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{b}|=|\vec{a}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng. Kí hiệu $\vec{b}=-\vec{a}$.
- Nếu $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ hay $-(-\vec{a})=\vec{a}$.
- Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$. Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

3. Định nghĩa hiệu của hai vectơ và quy tắc tìm hiệu

- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$;
- Ta có : $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ với ba điểm O, A, B bất kì (quy tắc trừ).

4. Tính chất của phép cộng các vectơ

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì ta có

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp) ;
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vectơ - không) ;
- $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ

1. Phương pháp

Dùng định nghĩa tổng của hai vectơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vectơ.

2. Các ví dụ

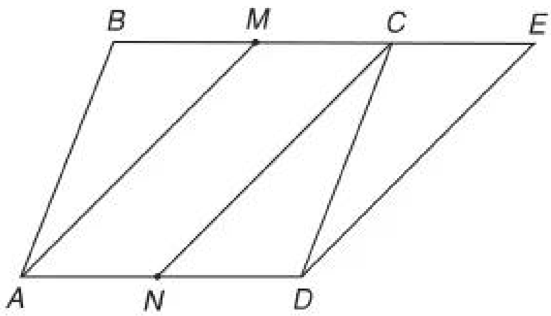
Ví dụ 1. Cho hình bình hành *ABCD*. Hai điểm *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD*.

a) Tìm tổng của hai vectơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

GIẢI

(Xem h.1.9)



Hình 1.9

a) Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$, ta có

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN}$$
$$= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$, ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$, với E là đỉnh của hình bình hành $AMED$.

b) Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 2. Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*.
Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

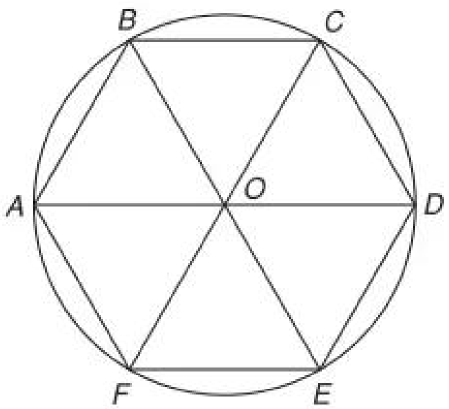
GIẢI

Tâm O của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác (h.1.10).

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$,
$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Do đó :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} =$$
$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}.$$



Hình 1.10

Ví dụ 3. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ và $\vec{a} \neq \vec{b}$. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$;

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} + \vec{b}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

GIẢI

Giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng. Hai vectơ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ có cùng giá, vậy chúng cùng phương.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng, thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B, C nằm về một phía của A. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cùng hướng.

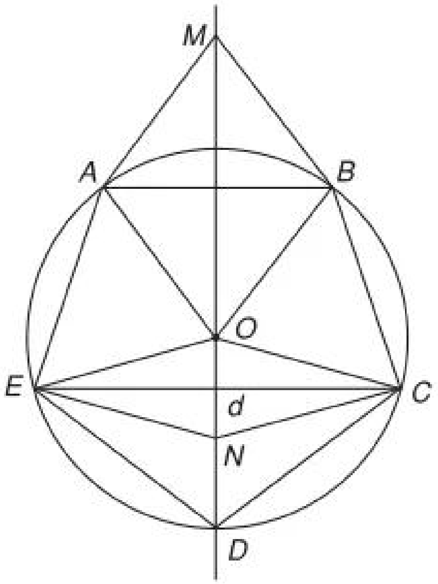
Ví dụ 4. Cho ngũ giác đều *ABCDE* tâm *O*.

a) Chứng minh rằng hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

b) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

GIẢI

(Xem h.1.11)



Hình 1.11

a) Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc d. Cũng như vậy, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N thuộc d. Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$ vì cùng có chung giá d.

b) AB và EC cùng vuông góc với d nên $AB \parallel EC$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{EC}$.

Vấn đề 2

Tìm vectơ đối và hiệu của hai vectơ

1. Phương pháp

• Theo định nghĩa, để tìm hiệu $\vec{a}-\vec{b}$, ta làm hai bước sau :

– Tìm vectơ đối của $\vec{b}$;

– Tính tổng $\vec{a}+(-\vec{b})$.

• Vận dụng quy tắc $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ với ba điểm O, A, B bất kì.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}+(-\vec{b})$.

GIẢI

Giả sử $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Ta có $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $-\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

Do đó $-\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\vec{a}+\vec{b})$.

Ví dụ 2.

a) Chứng minh rằng nếu $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

GIẢI

a) Giả sử $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. Do đó $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IA = IB$ và hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ thì $IA = IB$ và hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Do đó A, I, B thẳng hàng. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

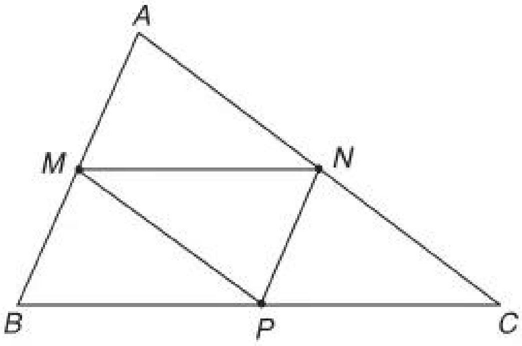
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

a) Tìm hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

GIẢI

(Xem h.1.12)



Hình 1.12

a) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$;

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$
(vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$) ;

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
(vì $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$) ;

$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$ (vì $-\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$).

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$.

VẤN ĐỀ 3

Tính độ dài của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$

1. Phương pháp

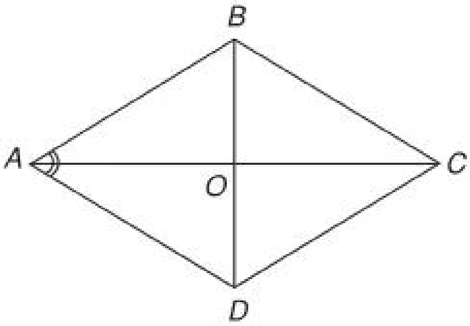
Đầu tiên tính $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CD}$. Sau đó tính độ dài các đoạn thẳng AB và CD bằng cách gắn nó vào các đa giác mà ta có thể tính được độ dài các cạnh của nó hoặc bằng các phương pháp tính trực tiếp khác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^o$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

GIẢI

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^o$ nên $AC = a\sqrt{3}$, $BD = a$ (h.1.13).



Hình 1.13

Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC = a\sqrt{3}$;

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ nên $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right| = CA = a\sqrt{3}$;

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO}$ (vì $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$).

Do đó $\quad \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right| = CO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

c) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

GIẢI

Giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B nằm giữa A và C. Do đó $AB + BC = AC$ (h.1.14).

Hình 1.14

Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = AC = AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và A nằm giữa B và C. Do đó $AC = BC - AB$ (h.1.15).

Hình 1.15

Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = AC = BC - AB = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

c) Từ các chứng minh trên suy ra rằng nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ hoặc $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Xét trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó A, B, C không thẳng hàng. Trong tam giác ABC ta có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

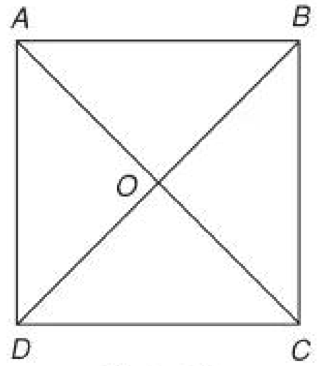
Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$.

GIẢI

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$ (h.1.16).



Hình 1.16

Do đó $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 2a$

(vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng),

$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$ (vì $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$).

Do đó $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.

Vấn đề 4

Chứng minh đẳng thức vectơ

1. Phương pháp

Mỗi vế của một đẳng thức vectơ gồm các vectơ được nối với nhau bởi các phép toán vectơ. Ta dùng quy tắc tìm tổng, hiệu của hai vectơ, tìm vectơ đối để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế của đẳng thức để được hai vế bằng nhau. Ta cũng có thể biến đổi đẳng thức vectơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ được công nhận là đúng.

2. *Các ví dụ*

Ví dụ 1. Chứng minh các khẳng định sau :

a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ (với $\vec{c}$ bất kì) ;

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

GIẢI

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Vậy $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$.

Ngược lại, nếu $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ ta cần chứng minh $\vec{a} = \vec{b}$. Giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_1B}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

Từ $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ suy ra $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AC}$. Vậy $A_1 \equiv A$ hay $\vec{a} = \vec{b}$.

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} + (-\vec{c}) = \vec{b} + (-\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

Ví dụ 2. Cho sáu điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E* và *F*. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}. \qquad (1)$$

GIẢI

Cách 1. Ta có : (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$. Vậy đẳng thức (1) được chứng minh.

Cách 2. Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}\\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF}\\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FF} = \vec{0}$).

Cách 3. Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}$)

• Sau đây là bài toán tương tự :

Cho bốn điểm A, B, C và D. Hãy chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ theo ba cách như ví dụ trên.

Ví dụ 3. Cho năm điểm A, B, C, D và E. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$$

GIẢI

Ta có $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD},\ -\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EC}$ nên :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\\ &=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EC}\\ &=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}.$$

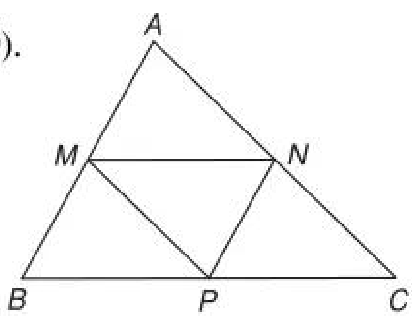
GIẢI

Biến đổi vế trái (h.1.17) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\\ &=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{NC}\\ &=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AN}\\ &=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AN}$

và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NN}=\vec{0}$).



Hình 1.17

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.8. Cho năm điểm A, B, C, D và E. Hãy xác định tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.

1.9. Cho bốn điểm A, B, C và D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

1.10. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Chứng minh O là trung điểm của AB.

b) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Chứng minh $O \equiv B$.

1.11. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

1.12. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

1.13. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vectơ đối nhau.

1.14. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

1.15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$ thì tam giác ABC là tam giác vuông tại C.

1.16. Cho ngũ giác $ABCDE$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}$.

1.17. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Với điều kiện nào thì vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$?

1.18. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O và tạo với nhau góc 60^{o}. Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là 100 N.

1.19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC. Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N, cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FN}$.