§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

2.29. a) Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2.\ 2\sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Vậy $c = 2$ và tam giác ABC cân tại A có $b = c = 2$.

Ta có $\widehat{C} = 30^o$, vậy $\widehat{B} = 30^o$ và $\widehat{A} = 180^o - (30^o + 30^o) = 120^o$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

b) $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$. Vì tam giác ABC cân tại A nên $h_a = m_a = 1$.

2.30. Ta có $c = 6$ là cạnh lớn nhất của tam giác. Do đó $\widehat{C}$ là góc lớn nhất.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2.3.4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \widehat{C} \approx 117^o17'.$$

Muốn tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất ta dùng công thức Hê-rông để tính diện tích tam giác và từ đó suy ra đường cao tương ứng.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{1}{2}(3+4+6) = \frac{13}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{13}{2} - 3\right)\left(\frac{13}{2} - 4\right)\left(\frac{13}{2} - 6\right)} = \frac{\sqrt{455}}{4}.$$

Ta có $h_c = \dfrac{2S}{c} = \dfrac{\sqrt{455}}{2.6} = \dfrac{\sqrt{455}}{12}$.

2.31. Ta có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{8 + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 12}{4\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \dfrac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8}$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3})}{8(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\widehat{A} = 120^o$.

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2.ca} = \frac{6+2-2\sqrt{12}+12-8}{2.(\sqrt{6}-\sqrt{2}).2\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{12}}{4\sqrt{18}-4\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4(3-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\text{ Vậy } \widehat{B} = 45^{\circ}.$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{ac\sin B}{a} = c\sin B = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}-1.$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ac\sin B}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ac\sin B}{a+b+c}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+1}.$$

2.32. Ta có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+64-112}{2.6.8} = -\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.6.8.\frac{3\sqrt{7}}{8} = 9\sqrt{7}\ \text{(cm}^2\text{)}.$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{18\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \frac{9}{2} = 4,5\ \text{(cm)}.$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4\sqrt{7}.6.8}{4.9\sqrt{7}} = \frac{16}{3}\ \text{(cm)}.$$

2.33. a) $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{18^2+16^2}{2} - \frac{26^2}{4}$

$$= \frac{324+256}{2} - \frac{676}{4} = \frac{484}{4} \Rightarrow m_a = \frac{22}{2} = 11.$$

b) $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 \\ 4m_b^2 = 2(a^2+c^2) - b^2 \\ 4m_c^2 = 2(a^2+b^2) - c^2. \end{cases}$

Ta suy ra : $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2.34. a) Theo định lí sin ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Ta suy ra : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} = \dfrac{2a}{\sin B + \sin C}$

$\Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C$.

b) Đối với tam giác ABC ta có : $S = \dfrac{1}{2} ab \sin C = \dfrac{1}{2} h_c.c = \dfrac{abc}{4R}$.

Ta suy ra $h_c = \dfrac{ab}{2R}$. Tương tự ta có $h_b = \dfrac{ac}{2R}$, $h_a = \dfrac{bc}{2R}$. Do đó :

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2R\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right) = 2R\frac{b+c}{abc} \text{ mà } b + c = 2a$$

nên $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{2R.2a}{abc} = \dfrac{2R.2}{bc} = \dfrac{2}{h_a}$.

Vậy $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

2.35. a) Theo định lí sin ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Do đó : $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Thay các giá trị này vào biểu thức $a = b \cos C + c \cos B$ ta có :

$2R \sin A = 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B$.

$\Rightarrow \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

b) Ta có $h_a = \dfrac{2S}{a}$, mà $2S = \dfrac{2abc}{4R} = \dfrac{abc}{2R}$.

Vậy $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc}{2R}$ hay $bc = 2R.h_a$, mà $b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$ nên :

$$2R\sin B.\,2R\sin C = 2R.h_a \quad \Rightarrow h_a = 2R\sin B\sin C.$$

2.36. a) Theo giả thiết ta có $a^2 = bc$.

Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ vào hệ thức trên ta có :

$$4R^2\sin^2 A = 2R\sin B\,.\,2R\sin C$$

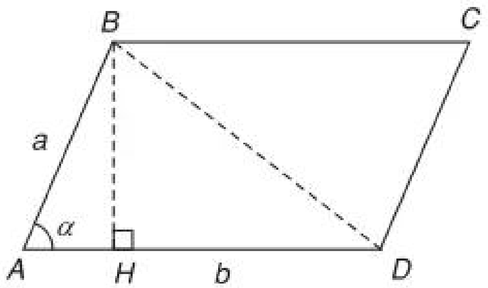
$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin B\,.\,\sin C.$$

b) Ta có $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Do đó : $a^2h_a^2 = b.c\,.h_b\,.h_c$.

Theo giả thiết : $a^2 = bc$ nên ta suy ra $h_a^2 = h_b\,.h_c$.

2.37. (h.2.29) Xét hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$, $\widehat{BAD} = \alpha$ và BH là đường cao, ta có $BH \perp AD$ tại H.



Hình 2.29

Gọi S là diện tích hình bình hành $ABCD$, ta có $S = AD.\,BH$ với $BH = AB\sin\alpha$.

Vậy $S = AD.AB\sin\alpha = a.b\sin\alpha$.

Nếu $\widehat{BAD} = \alpha$ thì $\widehat{ABC} = 180^\circ - \alpha$.

Khi đó ta vẫn có $\sin\widehat{BAD} = \sin\widehat{ABC}$.

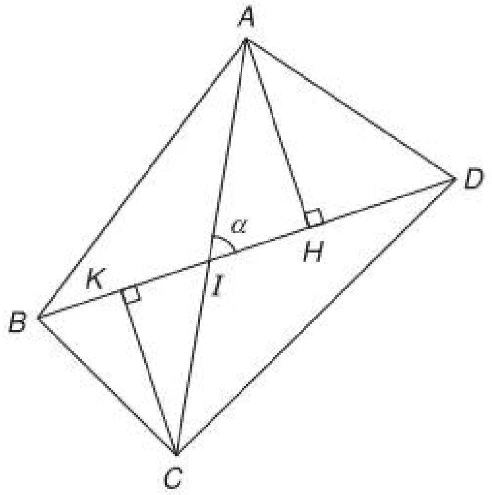
Nhận xét : Diện tích hình bình hành *ABCD* gấp đôi diện tích tam giác *ABD* mà tam giác *ABD* có diện tích là $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Do đó ta suy ra diện tích của hình bình hành bằng $ab\sin\alpha$.

2.38. (h.2.30) a) Ta có $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$.

Vẽ *AH* và *CK* vuông góc với *BD*.

Gọi *I* là giao điểm của hai đường chéo *AC* và *BD*. Ta có : $AH = AI\sin\alpha$

$CK = CI\sin\alpha$



Hình 2.30

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH.BD + \frac{1}{2}CK.BD$$

$$= \frac{1}{2}BD(AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD.(AI + IC)\sin\alpha = \frac{1}{2}BD.AC\sin\alpha.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}x.y\sin\alpha.$$

b) Nếu $AC \perp BD$ thì $\sin\alpha = 1$, khi đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2}xy$. Như vậy nếu tứ giác lồi *ABCD* có hai đường chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau thì diện tích của tứ giác đó bằng một nửa tích độ dài của hai đường chéo.

2.39. (h.2.31) Gọi α là góc giữa hai đường chéo *AC* và *BD* của tứ giác *ABCD*.

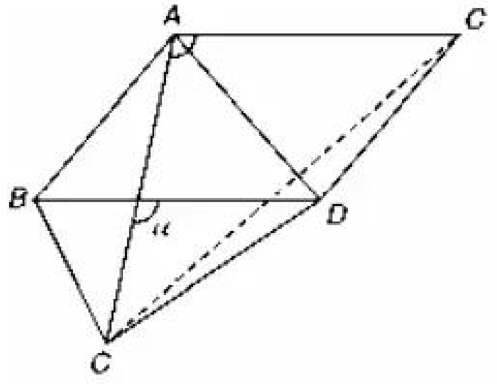
Ta có $\widehat{CAC'} = \alpha$ vì *AC'* // *BD*.

Theo kết quả bài 2.38 ta có :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha.$$

Mặt khác $S_{ACC'} = \frac{1}{2}AC.AC'\sin\alpha$,

mà $AC' = BD$ nên $S_{ABCD} = S_{ACC'}$.



Hình 2.31

2.40. Ta có $\widehat{B} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^o - (40^o + 120^o) = 20^o$.

Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{35.\sin 40^o}{\sin 120^o} \approx 26 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{35.\sin 20^o}{\sin 120^o} \approx 14 \text{ (cm)}.$$

2.41. Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^o \approx 785$$

$\Rightarrow c \approx 28$ (cm). Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a\sin C}{c} = \frac{7.\sin 130^o}{28} \approx 0,1915.$$

Vậy $\widehat{A} \approx 11^o 2'$.

$$\widehat{B} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 180^o - (11^o 2' + 130^o) = 38^o 58'.$$

2.42. Theo định lí côsin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} = \frac{528}{720} \approx 0,7333.$$

Vậy $\widehat{A} \approx 42^o 50'$.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2.14.20} = \frac{272}{560} \approx 0,4857.$$

Vậy $\widehat{B} \approx 60^o 56'$.

$$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^o - (42^o 50' + 60^o 56') = 76^o 14'.$$

2.43. Muốn tính chiều cao CD của tháp, trước hết ta hãy tính góc $\widehat{ADB}$.

$$\widehat{ADB} = 67^o - 43^o = 24^o.$$

Theo định lí sin đối với tam giác ABD ta có :

$$\frac{BD}{\sin 43^o} = \frac{AB}{\sin 24^o} \Rightarrow BD = \frac{30.\sin 43^o}{\sin 24^o} \approx 50,30 \text{ (m)}.$$

Trong tam giác vuông BCD ta có :

$$\sin 67^o = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD.\sin 67^o \approx 50,30.\sin 67^o$$

hay $CD \approx 46,30$ (m).

2.44. Theo định lí sin đối với tam giác ABC ta có :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{12}{\sin 37^o}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{5.\sin 37^o}{12} \approx 0,2508$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 14^o31'.$$

$$\widehat{B} \approx 180^o - (37^o + 14^o31') = 128^o29'.$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{12.\sin B}{\sin C} \approx \frac{12.\sin 128^o29'}{\sin 37^o} \approx 15,61 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách $AC \approx 15,61$ (m).