

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

3.28. a) $(E) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 ;$ b) $(E) : \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$

3.29. a) $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

– Hai tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5} ; 0), F_2(\sqrt{5} ; 0).$

– Bốn đỉnh : $A_1(-3 ; 0), A_2(3 ; 0), B_1(0 ; -2), B_2(0 ; 2).$

– Trục lớn : $A_1A_2 = 6.$

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 4.$

b) $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

– Hai tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{3} ; 0), F_2(\sqrt{3} ; 0).$

– Bốn đỉnh : $A_1(-2 ; 0), A_2(2 ; 0), B_1(0 ; -1), B_2(0 ; 1).$

– Trục lớn : $A_1A_2 = 4.$

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2.$

3.30. $\mathcal{C}(M; R)$ đi qua $F_2 \Rightarrow MF_2 = R$ (1)

$\mathcal{C}(M; R)$ tiếp xúc trong với $\mathcal{C}_1(F_1; 2a) \Rightarrow MF_1 = 2a - R$ (2)

$$(1) + (2) \text{ cho : } MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Vậy M di động trên elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và trục lớn $2a$.

3.31. Điểm M di động trên elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3.32. a) Ta có : $2a = 26 \Rightarrow a = 13$ và :

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow c = 5.$$

Do đó $b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 25 = 144$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Elip có tiêu điểm $F_1(-6 ; 0)$ suy ra $c = 6$.

Vậy : $\frac{c}{a} = \frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9$.

Do đó : $b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 36 = 45$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

3.33. a) Xét elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(E) đi qua $M\left(4 ; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3 ; \frac{12}{5}\right)$ nên thay toạ độ của M và N vào phương trình của (E) ta được :

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{81}{25b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Vậy phương trình của (E) là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Xét elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Vì } M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in (E) \text{ nên } \frac{9}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1. \quad (1)$$

Ta có : $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Rightarrow OM = OF_1$

$$\Rightarrow c^2 = OM^2 = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$$

và $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 5$.

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{9}{5(b^2 + 5)} + \frac{16}{5b^2} = 1 \Leftrightarrow 9b^2 + 16(b^2 + 5) = 5b^2(b^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow b^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4.$$

Suy ra $a^2 = 9$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.34. $(E) : 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

a) Ta có : $a^2 = 25, b^2 = 9$

$$\Rightarrow a = 5, b = 3.$$

Ta có : $c^2 = a^2 - b^2 = 16$

$$\Rightarrow c = 4.$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là : $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$ và có bốn đỉnh là $A_1(-5 ; 0), A_2(5 ; 0), B_1(0 ; -3)$ và $B_2(0 ; 3)$.

b) Gọi $M(x ; y)$ là điểm cần tìm, ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in (E) \\ \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \in (E) \\ OM^2 = c^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm \frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm M thoả mãn điều kiện của đề bài là :

$$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4} ; \frac{9}{4} \right), \left(\frac{5\sqrt{7}}{4} ; -\frac{9}{4} \right), \left(-\frac{5\sqrt{7}}{4} ; \frac{9}{4} \right), \left(-\frac{5\sqrt{7}}{4} ; -\frac{9}{4} \right).$$

3.35. a) Ta có : $a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$

$$\Rightarrow a^2 = 9(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow 9c^2 = 8a^2$$

$$\Rightarrow 3c = 2\sqrt{2}a.$$

Vậy $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\widehat{F_1B_1F_2} = 90^\circ \Rightarrow OB_1 = \frac{F_1F_2}{2}$

$$\Rightarrow b = c$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2c^2$$

$$\Rightarrow a = c\sqrt{2}.$$

Vậy $\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $A_1B_1 = 2c \Rightarrow A_1B_1^2 = 4c^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4c^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 5c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{5}c.$$

Vậy $\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

3.36. $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36.$ (1)

Xét đường thẳng d đi qua điểm $M(1 ; 1)$ và có hệ số góc k . Ta có phương trình của $d : y - 1 = k(x - 1)$ hay $y = k(x - 1) + 1.$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được

$$4x^2 + 9 [k(x - 1) + 1]^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 + 18k(1 - k)x + 9(1 - k)^2 - 36 = 0. \quad (3)$$

Ta có : d cắt (E) tại hai điểm A, B thoả mãn

$MA = MB$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm x_A, x_B sao cho :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1 - k)}{2(9k^2 + 4)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 18k^2 - 18k = 18k^2 + 8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Vậy phương trình của d là :

$$y = -\frac{4}{9}(x - 1) + 1 \quad \text{hay} \quad 4x + 9y - 13 = 0.$$