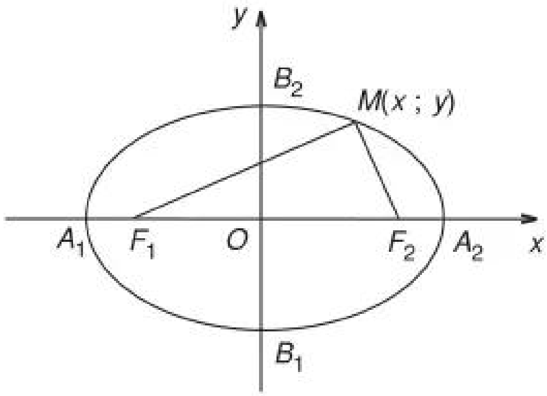
§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $F_1(-c\ ;\ 0)$, $F_2(c\ ;\ 0)$ và độ dài không đổi $2a$ ($a > c > 0$). Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $F_1M + F_2M = 2a$ (h.3.4). Ta có thể viết :

$$(E) = \left\{ M \mid F_1M + F_2M = 2a \right\}.$$



Hình 3.4

2. Phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 = b^2 + c^2)$.

3. Các thành phần của elip (E) là :

– Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0),\ F_2(c\,;0)$;

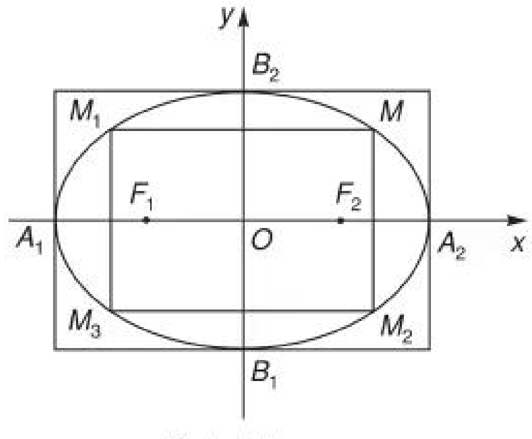
– Bốn đỉnh : $A_1(-a\,;0),\ A_2(a\,;0),$

$B_1(0\,;-b),\ B_2(0\,;b)$;

– Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a$;

– Độ dài trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$;

– Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$ (h.3.5).



Hình 3.5

4. Hình dạng của elip (E) :

– (E) có hai trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc toạ độ ;

– Mọi điểm của elip (E) ngoại trừ bốn đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật có kích thước $2a$ và $2b$ giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$. Hình chữ nhật đó gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Lập phương trình chính tắc của một elip khi biết các thành phần đủ để xác định elip đó

1. Phương pháp

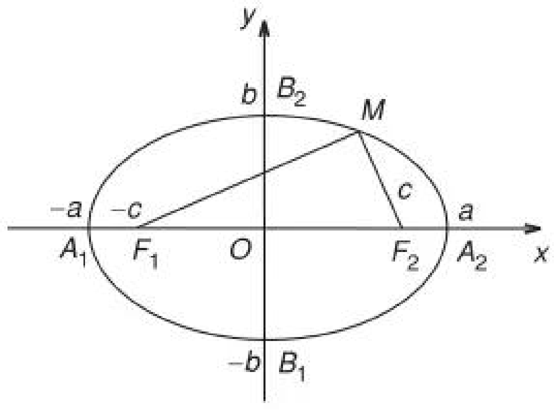
– Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của elip.

– Lập phương trình chính tắc của elip theo công thức :

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

– Ta có các hệ thức (h.3.6) :

- $0 < b < a$
- $c^2 = a^2 - b^2$



Hình 3.6

• $F_1F_2 = 2c$ (tiêu cự)

• $A_1A_2 = 2a$ (độ dài trục lớn)

• $B_1B_2 = 2b$ (độ dài trục nhỏ)

• $M \in (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a$.

– Ta có toạ độ các điểm đặc biệt của elip (E) :

• Hai tiêu điểm : $F_1(-c\ ;\ 0)$, $F_2(c\ ;\ 0)$

• Hai đỉnh trên trục lớn : $A_1(-a\ ;\ 0)$, $A_2(a\ ;\ 0)$

• Hai đỉnh trên trục nhỏ : $B_1(0\ ;\ -b)$, $B_2(0\ ;\ b)$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6 ;

b) Một tiêu điểm là điểm $\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$ và điểm $\left(1\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip.

GIẢI

a) Ta có $2a = 10$ suy ra $a = 5$, $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

b) Phương trình chính tắc của (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Vì (E) có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$ nên $c = \sqrt{3}$. Ta có :

$$\left(1\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3. \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được $\dfrac{1}{b^2+3}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow 4b^2+3(b^2+3)=4b^2(b^2+3)$

$$\Leftrightarrow 4b^4+5b^2-9=0 \Leftrightarrow b^2=1.$$

Từ (2) suy ra $a^2=4$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (*E*) là : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (*E*) trong mỗi trường hợp sau :

a) Một đỉnh trên trục lớn là điểm (3 ; 0) và một tiêu điểm là điểm (–2 ; 0) ;

b) (*E*) đi qua hai điểm *M*(0 ; 1) và $N\left(1\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

GIẢI

a) Ta có $a = 3$; $c = 2$.

Suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

b) Phương trình chính tắc của (*E*) có dạng :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Do (*E*) đi qua hai điểm *M*(0 ; 1) và $N\left(1\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên thay toạ độ của *M* và *N* vào phương trình của (*E*) ta được :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=1\\ a^2=4.\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (*E*) là : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

VẤN ĐỀ 2

Xác định các thành phần của một elip khi biết phương trình chính tắc của elip đó

1. Phương pháp

Các thành phần của elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (h.3.7) :

– Trục lớn của (E) nằm trên Ox, $A_1A_2=2a$;

– Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy, $B_1B_2=2b$;

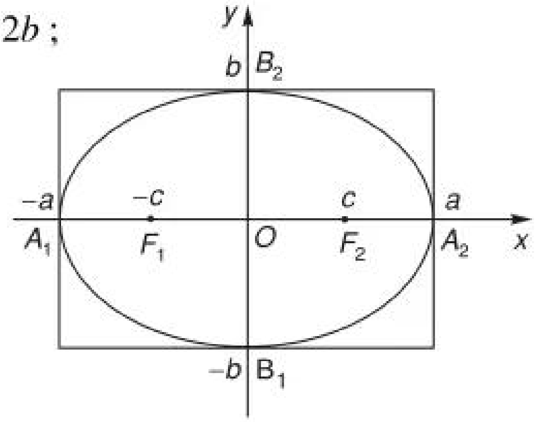
– Hai tiêu điểm : $F_1\ (-c\ ;0)$, $F_2\ (c\ ;0)$

với $c=\sqrt{a^2-b^2}$;

– Tiêu cự : $F_1F_2=2c$;

– Bốn đỉnh : $A_1(-a\ ;0)$, $A_2\ (a\ ;0)$,

$B_1(0\ ;-b)$, $B_2\ (0\ ;b)$;



Hình 3.7

– Tỉ số $\dfrac{c}{a}<1$ ($e=\dfrac{c}{a}$ còn gọi là tâm sai của elip) ;

– Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là : $x=\pm a\ ;y=\pm b$.

Lưu ý : Với $M(x\ ;y)\in(E)$, ta luôn có : $\begin{cases}F_1M=a+\dfrac{c}{a}x\\ F_2M=a-\dfrac{c}{a}x\end{cases}$

Thật vậy, ta có : $F_1M^2=(x+c)^2+y^2$

$F_2M^2=(x-c)^2+y^2$

Suy ra $F_1M^2-F_1M^2=4cx$ (1)

Theo định nghĩa của elip ta có : $F_1M+F_2M=2a$ (2)

Chia (1) cho (2) ta được : $F_1M-F_2M=2\dfrac{c}{a}x$ (3)

Từ (2) và (3) ta tính được F_1M và F_2M.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xác định độ dài các trục, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh và vẽ elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

GIẢI

Phương trình (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Do đó : $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$

Vậy (E) có :

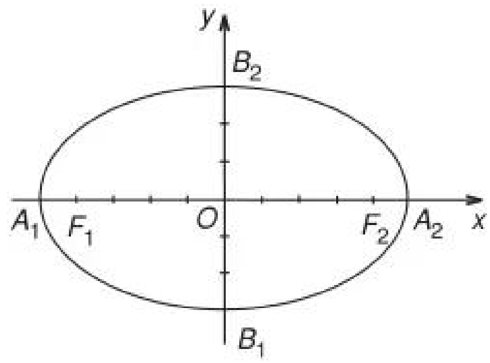
– Trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 10$;

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b = 6$;

– Hai tiêu điểm : $F_1(-4 ; 0)$, $F_2(4 ; 0)$;

– Bốn đỉnh : $A_1(-5 ; 0)$, $A_2(5 ; 0)$,

$B_1(0 ; -3)$, $B_2(0 ; 3)$.



Hình 3.8

Hình vẽ của (E) như hình 3.8.

Ví dụ 2. Cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Hãy viết phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) có đường kính là F_1F_2 trong đó F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E).

GIẢI

Phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ta có $a^2 = 100, b^2 = 36.$

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 64$

$c = 8.$

Đường tròn đường kính F_1F_2 có tâm là gốc toạ độ và có bán kính $R = c = 8$.

Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $x^2 + y^2 = 64$.

Vấn đề 3

Chứng minh điểm M di động trên một elip

1. Phương pháp

Để chứng tỏ điểm M di động trên một elip ta có hai cách (h.3.9) :

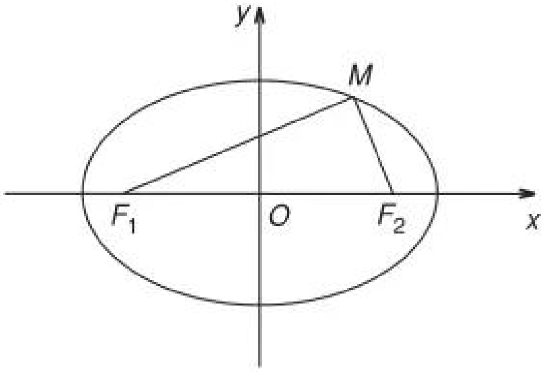
Cách 1 : Chứng minh tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cố định F_1, F_2 là một hằng số $2a$ ($F_1F_2 < 2a$).

Khi đó M di động trên elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 và trục lớn là $2a$.

Cách 2 : Chứng minh trong mặt phẳng toạ độ Oxy điểm $M(x ; y)$ có toạ độ thoả mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

với a, b là hai hằng số thoả mãn $0 < b < a$.



Hình 3.9

2. Các ví dụ

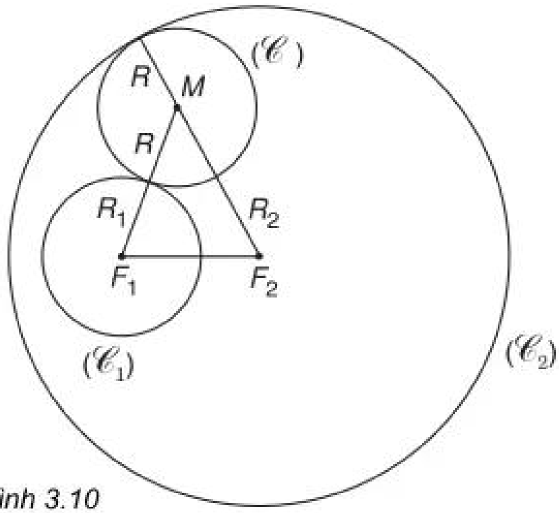
Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $\mathcal{C}_1(F_1 ; R_1)$ và $\mathcal{C}_2(F_2 ; R_2)$. $(\mathcal{C}_1)$ nằm trong $(\mathcal{C}_2)$ và $F_1 \neq F_2$. Gọi M là tâm của đường tròn $(\mathcal{C})$ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc ngoài với $(\mathcal{C}_1)$ và tiếp xúc trong với $(\mathcal{C}_2)$. Hãy chứng tỏ điểm M di động trên một elip.

GIẢI

Ta có $MF_1 = R + R_1$; $MF_2 = R_2 - R$.

Suy ra $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$.

Vậy M di động trên elip có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có trục lớn là $2a = R_1 + R_2$.



Hình 3.10

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho điểm *M*(*x* ; *y*) di động có toạ độ luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

trong đó *t* là tham số thay đổi.

Hãy chứng minh điểm *M* di động trên một elip.

GIẢI

Ta có : $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{5} = \cos t \\ \dfrac{y}{4} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{16} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Vậy *M* di động trên elip có phương trình là : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.28. Viết phương trình chính tắc của elip (*E*) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục nhỏ bằng 12 và tiêu cự bằng 16 ;

b) Một tiêu điểm là (12 ; 0) và điểm (13 ; 0) nằm trên elip.

3.29. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài các trục của mỗi elip có phương trình sau :

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$;   b) $x^2 + 4y^2 = 4$.

3.30. Cho đường tròn $\mathscr{C}_1(F_1 ; 2a)$ cố định và một điểm F_2 cố định nằm trong $(\mathscr{C}_1)$.

Xét đường tròn di động $(\mathscr{C})$ có tâm *M*. Cho biết $(\mathscr{C})$ luôn đi qua điểm F_2 và $(\mathscr{C})$ luôn tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$. Hãy chứng tỏ *M* di động trên một elip.

3.31. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho điểm *M*(*x* ; *y*) di động có toạ độ luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$$

trong đó *t* là tham số. Hãy chứng tỏ *M* di động trên một elip.

3.32. Viết phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{5}{13}$;

b) Tiêu điểm $F_1(-6 ; 0)$ và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{2}{3}$.

3.33. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 biết

a) (E) đi qua hai điểm $M\left(4 ; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3 ; \frac{12}{5}\right)$;

b) (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}} ; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

3.34. Cho elip $(E) : 9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 và các đỉnh của (E).

b) Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông.

3.35. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$. Tính tỉ số $\frac{c}{a}$ trong các trường hợp sau :

a) Trục lớn bằng ba lần trục nhỏ ;

b) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông ;

c) Khoảng cách giữa đỉnh trên trục nhỏ và đỉnh trên trục lớn bằng tiêu cự.

3.36. Cho elip $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1 ; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB.