Ta lại có $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow b\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có : $b\cos C + c\cos B = \dfrac{2a^2}{2a} = a$.

Ví dụ 3. Tam giác *ABC* có *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c* và đường trung tuyến *AM* = *c* = *AB*. Chứng minh rằng :

a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$;

b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$.

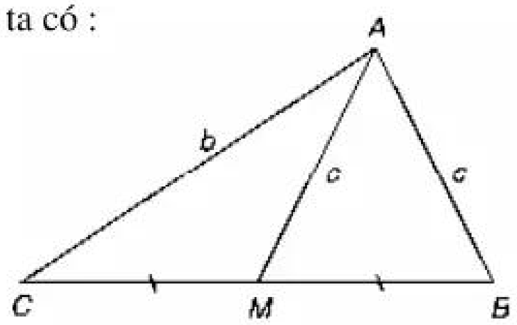
GIẢI

(Xem h.2.16)

a) Theo định lí về trung tuyến của tam giác ta có :

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2$$

$\Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2)$.



Hình 2.16

b) Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}. (*)$$

Thay $a^2 = 2(b^2 - c^2)$ vào (*) ta có :

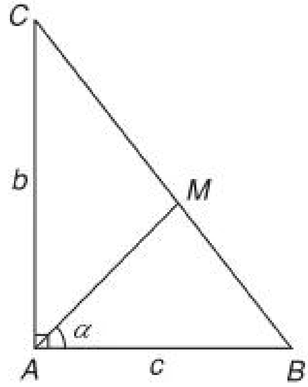
$$\frac{2(b^2 - c^2)}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$\Rightarrow \sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$.

Ví dụ 4. Tam giác *ABC* vuông tại *A* có các cạnh góc vuông là *b* và *c*. Lấy một điểm *M* trên cạnh *BC* và cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng :

$$AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}.$$

GIẢI



Hình 2.17

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}AM.c.\sin\alpha + \frac{1}{2}\ AM.b.\sin\ (90^\circ - \alpha)$$

hay $\quad bc = AM\ (c\ \sin\alpha + b\ \cos\alpha)$ (h.2.17).

Vậy $AM = \dfrac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}$.

VẤN ĐỀ 3

Giải tam giác

1. Phương pháp

Một tam giác thường được xác định khi biết ba yếu tố. Trong các bài toán giải tam giác, người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau :

– Biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó (g, c, g) ;

– Biết một góc và hai cạnh kề góc đó (c, g, c) ;

– Biết ba cạnh (c, c, c).

Để tìm các yếu tố còn lại của tam giác người ta thường sử dụng các định lí côsin, định lí sin, định lí tổng ba góc của một tam giác bằng 180° và đặc biệt có thể sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải tam giác *ABC* biết *b* = 14, *c* = 10, $\widehat{A} = 145^\circ$.

GIẢI

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^o$

$$\approx 196 + 100 - 280.(-0,8191) \approx 525,35.$$

Vậy $a \approx 23$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b.\sin A}{a} = \frac{14.\sin 145^o}{23} \approx 0,34913 \Rightarrow \widehat{B} \approx 20^o26'$$

$$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^o - (145^o + 20^o26') = 14^o34'.$$

Ví dụ 2. Giải tam giác *ABC* biết *a* = 4, *b* = 5, *c* = 7.

GIẢI

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} = \frac{58}{70} \approx 0,8286 \Rightarrow \widehat{A} \approx 34^o3'.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2.4.7} = \frac{40}{56} \approx 0,71428 \Rightarrow \widehat{B} \approx 44^o25'.$$

$$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^o - (34^o3' + 44^o25') = 101^o32'.$$

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.29. Tam giác *ABC* có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ và $\widehat{C} = 30^o$.

a) Tính cạnh *c*, góc *A* và diện tích *S* của tam giác *ABC* ;

b) Tính chiều cao h_a và đường trung tuyến m_a của tam giác *ABC*.

2.30. Tính góc lớn nhất của tam giác *ABC* biết *a* = 3, *b* = 4, *c* = 6. Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

2.31. Tam giác *ABC* có $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính các góc *A*, *B* và các độ dài h_a, *R*, *r* của tam giác đó.

2.32. Tam giác *ABC* có $a = 4\sqrt{7}$ cm, *b* = 6cm, *c* = 8 cm. Tính diện tích *S*, đường cao h_a và bán kính *R* của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

2.33. Gọi m_a, m_b, m_c là các trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC.

a) Tính m_a, biết rằng $a = 26$, $b = 18$, $c = 16$.

b) Chứng minh rằng : $4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2.34. Tam giác ABC có $b + c = 2a$. Chứng minh rằng :

a) $2\sin A = \sin B + \sin C$; b) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

2.35. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các hệ thức :

a) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$;

b) $h_a = 2R \sin B \sin C$.

2.36. Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng :

a) $\sin^2 A = \sin B . \sin C$;

b) $h_b . h_c = h_a^2$.

2.37. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh liên tiếp với sin của góc xen giữa chúng.

2.38. Cho hình tứ giác lồi $ABCD$ có đường chéo $AC = x$, đường chéo $BD = y$ và góc tạo bởi AC và BD là α. Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $S = \dfrac{1}{2} x.y.\sin\alpha$;

b) Nêu kết quả trong trường hợp AC vuông góc với BD.

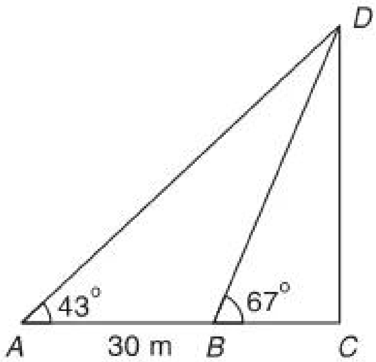
2.39. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng hình bình hành $ABDC'$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ và tam giác ACC' có diện tích bằng nhau.

2.40. Cho tam giác ABC biết $c = 35$cm, $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính a, b, $\widehat{B}$.

2.41. Cho tam giác ABC biết $a = 7$cm, $b = 23$cm, $\widehat{C} = 130^\circ$. Tính c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

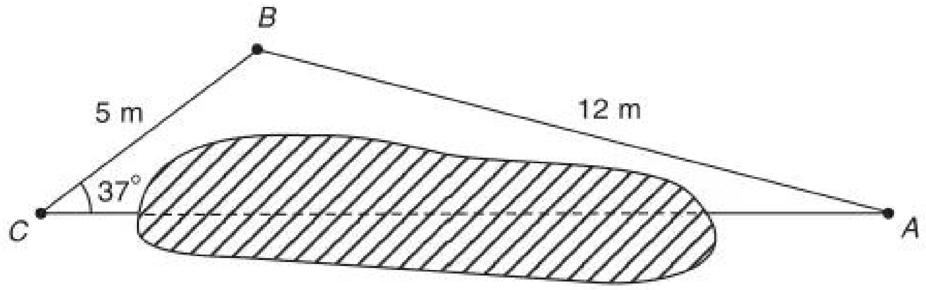
2.42. Cho tam giác ABC biết $a = 14$ cm, $b = 18$ cm, $c = 20$ cm. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

2.43. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao CD của một cái tháp với C là chân tháp, D là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm A, B có khoảng cách $AB = 30$ m sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng người ta đo được các góc $\widehat{CAD} = 43^o$, $\widehat{CBD} = 67^o$ (h.2.18). Hãy tính chiều cao CD của tháp.



Hình 2.18

2.44. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau : Xác định một điểm B có khoảng cách $AB = 12$ m và đo được góc $\widehat{ACB} = 37^o$ (h.2.19). Hãy tính khoảng cách AC biết rằng $BC = 5$ m.



Hình 2.19