§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa *tích của vectơ với một số*. Cho số k và vectơ $\vec{a}$, dựng được vectơ $k\vec{a}$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số : Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tuỳ ý và với mọi số $k, h \in \mathbb{R}$ ta có :

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

3. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ta luôn tìm được số k để $\vec{a} = k\vec{b}$ và khi đó số k tìm được là duy nhất.

4. Áp dụng :

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, với số k xác định.
- I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, $\forall M$.
- G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall M$.

5. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{x}$ là một vectơ tuỳ ý. Bao giờ cũng tìm được cặp số h và k duy nhất sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định vectơ $k\vec{a}$

1. Phương pháp

Dựa vào định nghĩa vectơ $k\vec{a}$.

• $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

Nếu $k > 0$, $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng ;

Nếu $k < 0$, $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ ngược hướng.

• $k.\vec{0} = \vec{0}$, $0.\vec{a} = \vec{0}$, $0.\vec{0} = \vec{0}$.

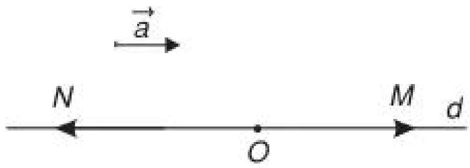
• $1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

GIẢI

Vẽ đường thẳng d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$. (Nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$) (h.1.18).



Hình 1.18

Trên d lấy điểm M sao cho $OM = 3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi đó $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$. Lấy điểm N trên d sao cho $ON = 4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng, khi đó $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm số k trong các đẳng thức sau :

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$; c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

GIẢI

(Xem h.1.19)

Hình 1.19

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $k = \dfrac{1}{5}\cdot$

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{4}$. Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng nên $k = -\dfrac{1}{4}\cdot$

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên $k = -\dfrac{1}{5}\cdot$

Ví dụ 3. a) Chứng minh vectơ đối của vectơ $5\vec{a}$ là $(-5)\vec{a}$.

b) Tìm vectơ đối của các vectơ $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

GIẢI

a) $-(5\vec{a}) = (-1).(5\vec{a}) = ((-1)5).\vec{a} = (-5).\vec{a}$

b) $-(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a}) + (-1).(3\vec{b})$

$$= (-2).\vec{a} + (-3).\vec{b} = -2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

$-(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).\vec{a} + 2.\vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$

Vấn đề 2

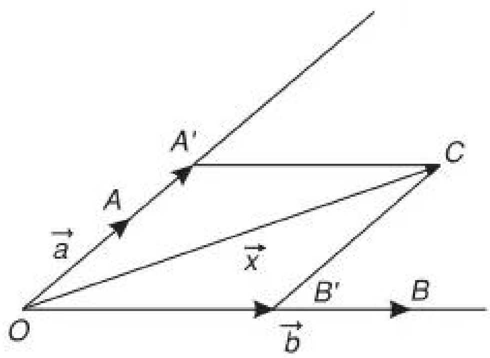
Phân tích (biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

1. Phương pháp

a) Để phân tích vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{OC}$ theo hai vectơ không cùng phương $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ta làm như sau :

• Vẽ hình bình hành $OA'CB'$ có hai đỉnh O, C và hai cạnh OA' và OB' lần lượt nằm trên hai giá của $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (h.1.20).

Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.



Hình 1.20

• Xác định số h để $\overrightarrow{OA'} = h\overrightarrow{OA}$.

Xác định số k để $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$.

Khi đó $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

b) Có thể sử dụng linh hoạt các công thức sau :

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, với ba điểm O, A, B bất kì ;

• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ nếu tứ giác $ABCD$ là hình hình hành.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$.

GIẢI

Vì tứ giác $AEDF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \vec{v}$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (h.1.21).

Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

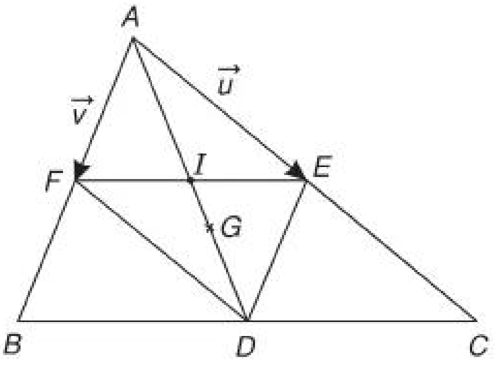
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF}$,

vậy $\overrightarrow{DE} = (-1).\vec{v} + 0.\vec{u}$.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}$,

vậy $\overrightarrow{DC} = \vec{u} - \vec{v}$.



Hình 1.21

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

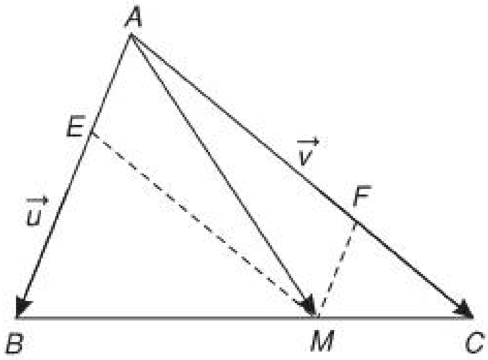
GIẢI

Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$



Hình 1.22

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ (h.1.22).

• Ta có thể giải bài toán bằng cách dùng định lí Ta-lét như sau :

Kẻ $ME \parallel AC$ và $MF \parallel AB$, ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$. Theo định lí Ta-lét $AE = \frac{1}{3}AB$, $AF = \frac{2}{3}AC$. Do đó $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{v}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Vấn đề 3

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

1. Phương pháp

Dựa vào các khẳng định sau :

• Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

• Nếu $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB \parallel CD$.

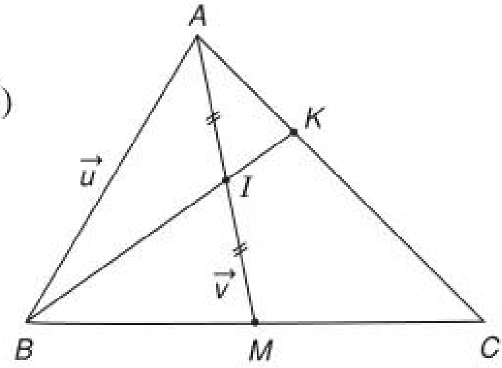
2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

GIẢI

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{BA}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ (h.1.23).

Ta phân tích $\overrightarrow{BK}$ và $\overrightarrow{BI}$ theo $\vec{u}, \vec{v}$.



Hình 1.23

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$= \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2\vec{u} + \vec{v} = 3\overrightarrow{BK}$, $2\vec{u} + \vec{v} = 4\overrightarrow{BI}$.

Vậy $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$ hay $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$. Do đó ba điểm *B, I, K* thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC*. Hai điểm *M, N* được xác định bởi các hệ thức : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh *MN // AC*.

GIẢI

Ta có $\quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$,

hay $\quad (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$, mà *A, B, C* không thẳng hàng nên bốn điểm *A, B, C, M* là một hình bình hành.

Từ đó suy ra *M* không thuộc đường thẳng *AC* và *MN // AC*.

VẤN ĐỀ 4

Chứng minh các đẳng thức vectơ có chứa tích của vectơ với một số

1. Phương pháp

- Sử dụng tính chất tích của vectơ với một số.
- Sử dụng các tính chất của : ba điểm thẳng hàng, trung điểm của một đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

GIẢI

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng CD nên $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Mặt khác $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \quad \text{(vì } M \text{ là trung điểm của } AB\text{)}.\end{aligned}$$

Vậy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

GIẢI

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Do đó

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

GIẢI

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}. \qquad (1)$$

Hơn nữa $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức trên và vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

- Có thể chứng minh như sau

Ta có $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'}$.

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên và sử dụng điều kiện của trọng tâm tam giác ta suy ra điều cần chứng minh.

Vấn đề 5

Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức vectơ

1. Phương pháp

Sử dụng các khẳng định và các công thức sau :

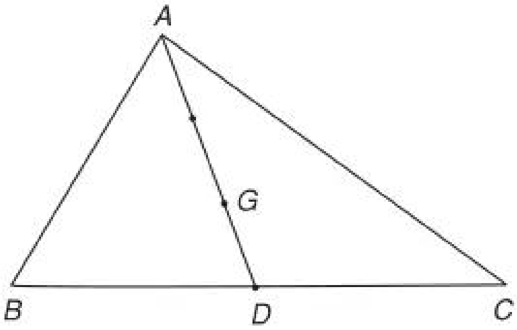
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$;
- Cho điểm A và cho $\vec{a}$. Có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B \equiv C$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A_1 \equiv A$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC. Xác định vị trí của điểm G biết $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$.

GIẢI

Từ $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$, suy ra ba điểm A, G, D thẳng hàng, $AG = 2GD$ và điểm G ở giữa A và D. Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC (h.1.24).



Hình 1.24

Ví dụ 2. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

GIẢI

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Từ đó suy ra $|\overrightarrow{IA}| = |-2\overrightarrow{IB}|$ hay $IA = 2IB$, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng (h.1.25).

Hình 1.25

Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà $IB = \dfrac{1}{3}AB$.

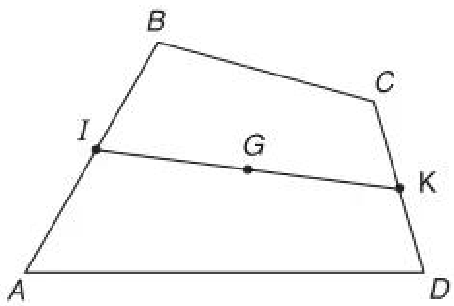
Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định vị trí điểm G sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$, trong đó I là trung điểm của AB và $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$, trong đó K là trung điểm của CD. Vậy theo giả thiết ta có $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ (h.1.26).

Do đó G là trung điểm của đoạn thẳng IK.



Hình 1.26

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.20. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = \vec{b} \neq \vec{0}$;

b) $\vec{a} = -\vec{b}$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$;

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng và $|\vec{a}| = 20,\ |\vec{b}| = 5$;

d) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 15$;

e) $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$;

g) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$;

h) $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$.

1.21. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m\vec{a} = m\vec{b}$;

b) $m\vec{a} = m\vec{b}$ và $m \neq 0$ thì $\vec{a} = \vec{b}$;

c) Nếu $m\vec{a} = n\vec{a}$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $m = n$.

1.22. Chứng minh rằng tổng của n vectơ $\vec{a}$ bằng $n\vec{a}$ (n là số nguyên dương).

1.23. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm của tam giác ABC.

1.24. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì hai tam giác đó có cùng trọng tâm.

1.25. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Dựng các vectơ :

a) $2\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - 2\vec{b}$; c) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

1.26. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có cạnh a.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ theo a.

1.27. Cho tam giác ABC có trung tuyến $\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của BC). Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.28. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm của MN.

Phân tích vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.29. Cho tam giác ABC. Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$.

a) Chứng minh rằng A là trung điểm của $B'C'$.

b) Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

1.30. Cho tam giác ABC. Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

c) Hãy dựng điểm J thoả mãn điều kiện đề bài.

1.31. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

1.32. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

1.33. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

1.34. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1.35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a) Chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Chứng minh : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$;

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Từ đó có kết luận gì về ba điểm O, H, G ?