**Ví dụ 3.** Tam giác $ABC$ có $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ; b) Tính góc $A$.

***GIẢI***

a) Ta có $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = 20.$

Vậy $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 20$.

b) Theo định nghĩa : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}| \cos A$. Ta có :

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{20}{5.8} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\widehat{A} = 60^o$.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác $ABC$ biết $a = 21$ cm, $b = 17$ cm, $c = 10$ cm.

a) Tính diện tích $S$ của tam giác $ABC$ và chiều cao $h_a$.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp $r$ của tam giác.

c) Tính độ dài đường trung tuyến $m_a$ phát xuất từ đỉnh $A$ của tam giác.

***GIẢI***

a) Ta có $p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$ (cm).

Theo công thức Hê-rông ta có

$$S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84 \ (\text{cm}^2).$$

Do đó $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.84}{21} = 8$ (cm).

b) Ta có $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5$ (cm).

c) Độ dài đường trung tuyến $m_a$ được tính theo công thức :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Do đó $m_a^2 = \dfrac{17^2+10^2}{2} - \dfrac{21^2}{4} = \dfrac{337}{4} = 84,25$

$\Rightarrow m_a = \sqrt{84,25} \approx 9,18$ (cm).

**Ví dụ 5.** Cho tam giác *ABC* biết $a = \sqrt{6}$ cm, *b* = 2 cm, $c = (1+\sqrt{3})$ cm. Tính các góc *A*, *B*, chiều cao $h_a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp *R* của tam giác *ABC*.

***GIẢI***

Theo định lí côsin ta có : $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{4+(1+\sqrt{3})^2-6}{4.(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Vậy $\widehat{A} = 60^o$.

Tương tự, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2+6-4}{2.\sqrt{6}.(1+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Vậy $\widehat{B} = 45^o$.

Ta có $\sin B = \dfrac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c.\sin B = (1+\sqrt{3}).\sin 45^o = \dfrac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Áp dụng định lí sin : $\dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{b}{2\sin B} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (cm).

## VẤN ĐỀ 2

### Chứng minh các hệ thức về mối quan hệ giữa các yếu tố của một tam giác

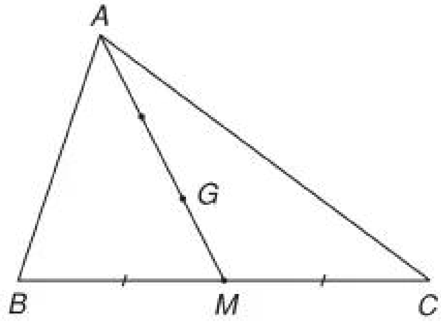
***1. Phương pháp***

Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cùng bằng một biểu thức nào đó, hoặc chứng minh hệ thức cần chứng minh tương đương với một hệ thức đã biết là đúng. Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm được các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

## 2. Các ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$




*Hình 2.15*

**GIẢI**

Theo tính chất của trọng tâm ta có $GA = \frac{2}{3}AM \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}AM^2$ (h.2.15).

Áp dụng công thức tính trung tuyến của một tam giác ta có :

$$AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2})$$

$$GA^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}.\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2}{9}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

Tương tự, $GB^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$

$$GC^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right).$$

Do đó $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\right] = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

**Ví dụ 2.** Tam giác $ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng :

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

**GIẢI**

Theo định lí côsin ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

$$\Rightarrow c\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (1)$$