§4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa toạ độ của một điểm, độ dài đại số của một vectơ trên một trục.

2. Định nghĩa toạ độ của một vectơ, của một điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

- $\vec{a} = (a_1 ;\ a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

- M có toạ độ là $(x ; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x ;\ y)$ với O là gốc toạ độ ;

  $x = \overline{OM_1}$, $y = \overline{OM_2}$, trong đó M_1 và M_2 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống Ox và Oy.

- Nếu A có toạ độ là $(x_A ;\ y_A)$, B có toạ độ là $(x_B ;\ y_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ;\ y_B - y_A).$$

3. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k\vec{a}$.

Cho $\quad \vec{a} = (a_1 ;\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ;\ b_2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ;\ a_2 + b_2) ;$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ;\ a_2 - b_2) ;$$

$$k\vec{a} = (ka_1 ; ka_2).$$

Từ đó suy ra rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k thoả mãn $\begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2. \end{cases}$

4. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \; ; \; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Tìm toạ độ của một điểm và độ dài đại số của một vectơ trên trục $(O\,;\,\vec{e})$

1. Phương pháp

Căn cứ vào định nghĩa toạ độ của điểm và độ dài đại số của vectơ.

- Điểm M có toạ độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{e}$ với O là điểm gốc.
- Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- Nếu M và N có toạ độ lần lượt là a và b thì $\overline{MN} = b - a$.

2. Các ví dụ

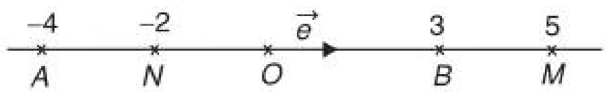
Ví dụ 1. Trên trục $(O\,;\,\vec{e})$ cho các điểm A, B, M, N lần lượt có toạ độ là -4 ; 3 ; 5 ; -2.

a) Biểu diễn các điểm đã cho trên trục ;

b) Tính độ dài đại số của các vectơ $\overline{AB}$, $\overline{AM}$, $\overline{MN}$.

GIẢI

a) Biểu diễn các điểm A, B, M, N như sau :



Hình 1.27

b) $\overline{AB} = 3 - (-4) = 7$

$\overline{AM} = 5 - (-4) = 9$

$\overline{MN} = -2 - 5 = -7.$

Ví dụ 2. Cho ba điểm tuỳ ý A, B, C trên trục $(O\,;\,\vec{e})$. Chứng minh rằng :

a) $\overline{AB} = AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$;

$\overline{AB} = -AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$.

b) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

GIẢI

a) $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{e}$. Từ đó suy ra :

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overline{AB}\right|.\left|\vec{e}\right|$ hay $|\overline{AB}| = AB$.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} > 0$, nên ta có $\overline{AB} = AB$. Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} < 0$, nên ta có $\overline{AB} = -AB$.

b) Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Vì $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{e}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{BC}.\vec{e}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{AC}.\vec{e}$ nên ta có :

$\overline{AB}.\vec{e} + \overline{BC}.\vec{e} = \overline{AC}.\vec{e}$ hay $\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right).\vec{e} = \overline{AC}.\vec{e}$.

Suy ra $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

☞ ***Chú ý :*** Hệ thức $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ gọi là hệ thức Sa-lơ.

Vấn đề 2

Xác định toạ độ của vectơ và của một điểm trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*

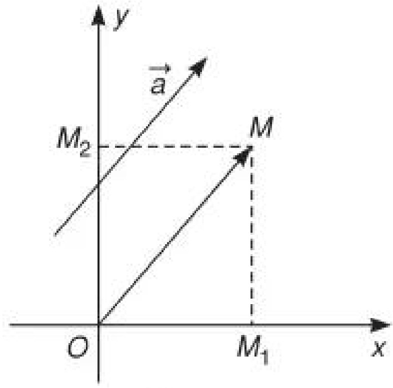
1. Phương pháp

Căn cứ vào định nghĩa toạ độ của một vectơ và toạ độ của một điểm trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*.

• Để tìm toạ độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau :

Vẽ vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Gọi hai điểm M_1 và M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy. Khi đó $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ trong đó $a_1 = \overline{OM_1}$, $a_2 = \overline{OM_2}$ (h.1.28).



Hình 1.28

• Để tìm toạ độ của điểm A ta tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$. Như vậy A có toạ độ là $(x ; y)$ trong đó $x = \overline{OA_1}$, $y = \overline{OA_2}$; A_1 và A_2 tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ A xuống Ox và Oy.

• Nếu biết toạ độ của hai điểm A, B ta tính được toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; \; y_B - y_A).$$

2. Các ví dụ

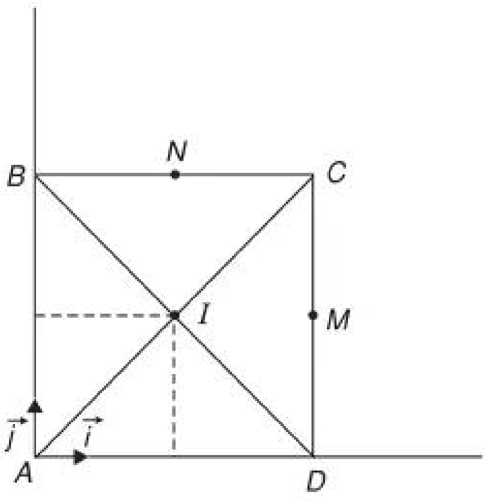
Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a = 5$. Chọn hệ trục toạ độ $(A ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $\vec{j}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, giao điểm I của hai đường chéo, trung điểm N của BC và trung điểm M của CD.

GIẢI

Ta có $A(0 ; 0)$, $B(0 ; 5)$, $C(5 ; 5)$,

$$D(5 ; 0), I\left(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{5}{2} ; 5\right),$$

$$M\left(5 ; \frac{5}{2}\right) \text{ (h.1.29).}$$



Hình 1.29

Ví dụ 2. Cho hình bình hành *ABCD* có *AD* = 4 và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 3, góc $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$. Chọn hệ trục toạ độ $(A\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

Kẻ $BH \perp AD$, ta có $BH = 3$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AH = \sqrt{3}$ (h.1.30).

Do đó ta có các toạ độ : $A(0\ ;\ 0)$,

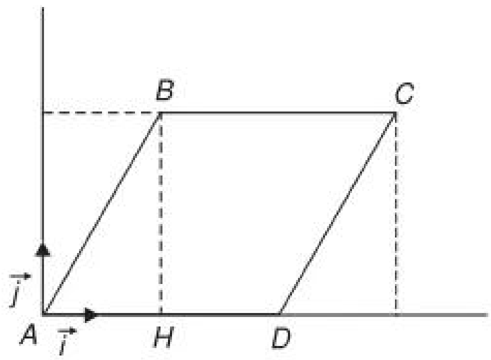
$B(\sqrt{3}\ ;\ 3)$, $C(4 + \sqrt{3}\ ;\ 3)$, $D(4\ ;\ 0)$.

Từ đó có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}\ ;\ 3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4\ ;\ 0)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}\ ;\ -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 + \sqrt{3}\ ;\ 3).$$



Hình 1.30

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *M*(1 ; 0), *N*(2 ; 2) và *P*(−1 ; 3) lần lượt là trung điểm các cạnh *BC*, *CA* và *AB*. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

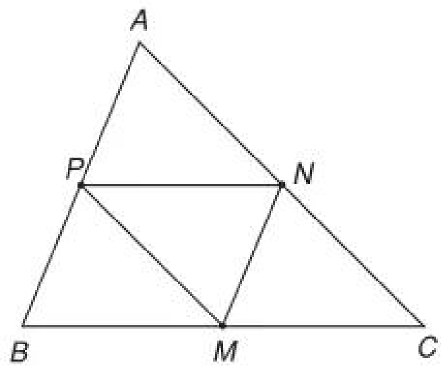
GIẢI

Ta có : *NAPM* là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$ (h.1.31).

$$\overrightarrow{NA} = (x_A - 2\ ;\ y_A - 2)$$

$$\overrightarrow{MP} = (-2\ ;\ 3).$$

Suy ra $\begin{cases} x_A - 2 = -2 \\ y_A - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 5. \end{cases}$



Hình 1.31

Vậy toạ độ của *A* là (0 ; 5).

Tương tự, từ $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ ta tính được $B(-2\ ;\ 1)$, $C(4\ ;\ -1)$.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành *ABCD* có *A*(−1 ; 3), *B*(2 ; 4), *C*(0 ; 1). Tìm toạ độ đỉnh *D*.

GIẢI

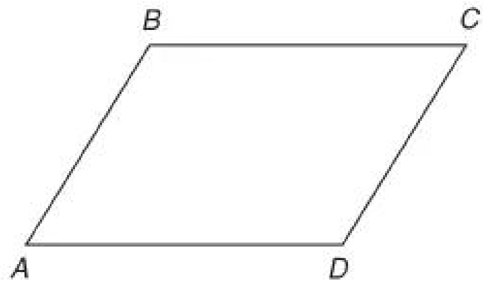
Giả sử $D = (x_D ; y_D)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1 ; y_D - 3)$,

$\overrightarrow{BC} = (-2 ; -3)$ (h.1.32). Do đó

$$\begin{cases} x_D + 1 = -2 \\ y_D - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 0. \end{cases}$$

Vậy toạ độ đỉnh D là $(-3 ; 0)$.



Hình 1.32

VẤN ĐỀ 3

Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.

1. Phương pháp

Tính theo các công thức toạ độ của $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $\vec{u} = (3 ; -2)$, $\vec{v} = (7 ; 4)$.

Tính toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u} - 4\vec{v}$, $-(3\vec{u} - 4\vec{v})$.

GIẢI

$\vec{u} + \vec{v} = (10 ; 2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (-4 ; -6)$, $2\vec{u} = (6 ; -4)$

$3\vec{u} = (9 ; -6)$, $4\vec{v} = (28 ; 16)$.

Vậy $3\vec{u} - 4\vec{v} = (-19 ; -22)$ và $-(3\vec{u} - 4\vec{v}) = (19 ; 22)$.

Ví dụ 2. Tìm x để các cặp vectơ sau cùng phương :

a) $\vec{a} = (2 ; 3)$, $\vec{b} = (4 ; x)$

b) $\vec{u} = (0 ; 5)$, $\vec{v} = (x ; 7)$

c) $\vec{m} = (x ; -3)$, $\vec{n} = (-2 ; 2x)$.

GIẢI

a) $\frac{4}{2}=\frac{x}{3} \Rightarrow x=6.$

b) $x=0.$

c) $\frac{x}{-2}=\frac{-3}{2x} \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x= \pm\sqrt{3}.$

VẤN ĐỀ 4

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song bằng toạ độ

1. Phương pháp

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau :

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$;
- Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ Có số k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(-1\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(-2\ ;\ 0)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

GIẢI

$\overrightarrow{AB}=(2\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1\ ;\ -1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$. Do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho $A(3\ ;\ 4)$, $B(2\ ;\ 5)$. Tìm x để điểm $C(-7\ ;\ x)$ thuộc đường thẳng AB.

GIẢI

Điểm C thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi : ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-10\ ;\ x-4)$.

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{-10}{-1}=\frac{x-4}{1} \Rightarrow x-4=10 \Rightarrow x=14.$$

Ví dụ 3. Cho bốn điểm $A(0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(2\ ;\ 7)$, $D(0\ ;\ 3)$. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song.

GIẢI

$\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2\ ;\ -4)$. Vậy $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. Do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2\ ;\ 6)$, mà $\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương. Do đó điểm C không thuộc đường thẳng AB. Vậy $AB \parallel CD$.

VẤN ĐỀ 5

Tính toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng, toạ độ của trọng tâm một tam giác

1. Phương pháp

Sử dụng các công thức sau :

- Toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng bằng trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai đầu mút.
- Toạ độ của trọng tâm tam giác bằng trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với $A(3\ ;\ 2)$, $B(-11\ ;\ 0)$, $C(5\ ;\ 4)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác.

GIẢI

Theo công thức toạ độ của trọng tâm tam giác ta có

$$x_G = \frac{3-11+5}{3} = -1,\ y_G = \frac{2+0+4}{3} = 2.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(1\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -3)$ đỉnh C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tìm toạ độ của C.

GIẢI

Vì C nằm trên Oy nên ta có $C(0\ ;\ y)$. Vì trọng tâm G nằm trên Ox nên ta có $G(x\ ;\ 0)$. Theo công thức toạ độ của trọng tâm tam giác ta có

$$y_G = \frac{-1-3+y}{3} = 0 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy C có toạ độ là $(0\ ;\ 4)$.

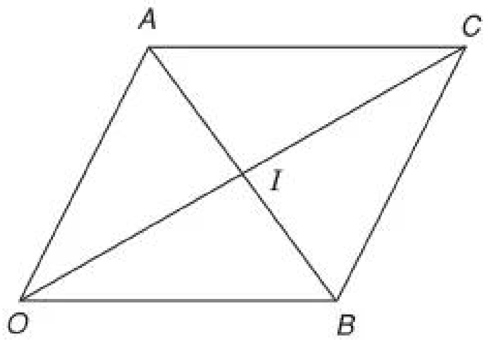
Ví dụ 3. Cho $A(-2\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 5)$. Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB và tìm toạ độ điểm C sao cho tứ giác $OACB$ là hình bình hành, O là gốc toạ độ.

GIẢI

Theo công thức toạ độ trung điểm ta có

$$x_I = \frac{-2+4}{2} = 1\ ; \qquad y_I = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy toạ độ I là $(1\ ;\ 3)$ (h.1.33).



Hình 1.33

Tứ giác $OACB$ là hình bình hành khi và chỉ khi I là trung điểm của OC. Do đó

$$\frac{x_C+0}{2} = 1 \Rightarrow x_C = 2.$$

$$\frac{y_C+0}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 6.$$

Vậy toạ độ C là $(2\ ;\ 6)$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.36. Viết toạ độ của các vectơ sau :

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}\ ; \qquad \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}\ ; \qquad \vec{c} = 3\vec{i}\ ; \qquad \vec{d} = -2\vec{j}.$$

1.37. Viết vectơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết toạ độ của $\vec{u}$ là :

$(2\ ;\ -3)$, $(-1\ ;\ 4)$, $(2\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ -1)$, $(0\ ;\ 0)$.

1.38. Cho $\vec{a} = (1 ; -2)$, $\vec{b} = (0 ; 3)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{z} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

1.39. Xét xem các cặp vectơ sau có cùng phương không ? Trong trường hợp cùng phương thì xét xem chúng cùng hướng hay ngược hướng.

a) $\vec{a} = (2 ; 3)$, $\vec{b} = (-10 ; -15)$.

b) $\vec{u} = (0 ; 7)$, $\vec{v} = (0 ; 8)$.

c) $\vec{m} = (-2 ; 1)$, $\vec{n} = (-6 ; 3)$.

d) $\vec{c} = (3 ; 4)$, $\vec{d} = (6 ; 9)$.

e) $\vec{e} = (0 ; 5)$, $\vec{f} = (3 ; 0)$.

1.40. a) Cho $A(-1 ; 8)$, $B(1 ; 6)$, $C(3 ; 4)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Cho $A(1 ; 1)$, $B(3 ; 2)$ và $C(m + 4 ; 2m + 1)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

1.41. Cho bốn điểm $A(-2 ; -3)$, $B(3 ; 7)$, $C(0 ; 3)$, $D(-4 ; -5)$.
Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

1.42. Cho tam giác ABC. Các điểm $M(1 ; 1)$, $N(2 ; 3)$, $P(0 ; -4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác.

1.43. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2 ; -3)$, $B(4 ; 5)$, $C(0 ; -1)$. Tính toạ độ của đỉnh D.

1.44. Cho tam giác ABC có $A(-5 ; 6)$, $B(-4 ; -1)$, $C(4 ; 3)$. Tìm toạ độ trung điểm I của AC. Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

1.45. Cho tam giác ABC có $A(-3 ; 6)$, $B(9 ; -10)$, $C(-5 ; 4)$.

a) Tìm toạ độ của trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $BGCD$ là hình bình hành.

1.46. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Chọn hệ toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

a) Tính toạ độ của các đỉnh của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trung điểm E của AC.

c) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1.47. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chọn hệ toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là tâm của lục giác đều, hai vectơ $\vec{i}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng, $\vec{j}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng hướng. Tính toạ độ các đỉnh của lục giác biết độ dài cạnh của lục giác là 6.