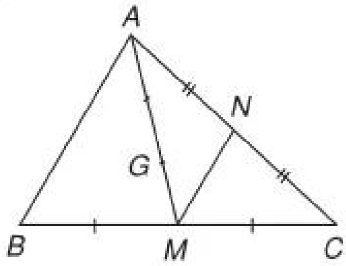
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

I- ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

1. (h.3.28) a) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \frac{3}{2}(1-1) \\ y_M - 1 = \frac{3}{2}(2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \frac{5}{2}. \end{cases}$



Hình 3.28

Vậy M có toạ độ là $\left(1\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

Điểm $N(x\,;\,y)$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy N có toạ độ là $(0\,;\,2)$.

b) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 2(1-0) \\ y_B - 1 = 2\left(\frac{5}{2} - 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 2. \end{cases}$

Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua hai điểm $A(1\,;\,1)$ và $B(3\,;\,2)$ nên có phương trình : $x - 2y + 1 = 0$.

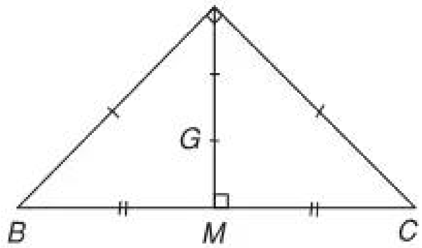
Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua hai điểm $B(3\,;\,2)$ và $M\left(1\,;\,\frac{5}{2}\right)$ nên có phương trình : $x + 4y - 11 = 0$.

2. (h. 3.29) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = 3\left(\frac{2}{3} - 1\right) \\ y_A + 1 = 3(0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2. \end{cases}$

Vậy A có toạ độ $(0\,;\,2)$.

Đặt $B\,(x\,;\,y)$ ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MA} \\ MB^2 = MA^2 \end{cases}$$



Hình 3.29

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(0-1) + (y+1)(2+1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ (3y+3)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ 10y^2 + 20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 0, & x = 4 \\ y = -2, & x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy ta có toạ độ của B và C như sau : $B(4 ; 0)$, $C(-2 ; -2)$ hoặc $B(-2 ; -2)$, $C(4 ; 0)$.

3. a) $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-5)^2 = 66$.

Vậy tập hợp các điểm M là một đường tròn.

b) Tâm là điểm $(-6 ; 5)$ bán kính bằng $\sqrt{66}$.

4. a) Đặt $C(x ; y)$, ta có : $C \in d \Leftrightarrow x = -2y - 1$. Vậy $C(-2y - 1 ; y)$.

Tam giác ABC cân tại C khi và chỉ khi

$CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2$

$\Leftrightarrow (3 + 2y + 1)^2 + (-1 - y)^2 = (-1 + 2y + 1)^2 + (-2 - y)^2$

$\Leftrightarrow (4 + 2y)^2 + (1 + y)^2 = 4y^2 + (2 + y)^2$.

Giải ra ta được $y = -\dfrac{13}{14}\cdot$

$$x = -2\left(\frac{-13}{14}\right) - 1 = \frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}\cdot$$

Vậy C có toạ độ là $\left(\dfrac{6}{7} ; -\dfrac{13}{14}\right)$.

b) Xét điểm $M(-2t - 1 ; t)$ trên d, ta có :

$\widehat{AMB} = 90^{\circ} \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (4 + 2t)^2 + (1 + t)^2 + 4t^2 + (2 + t)^2 = 17$

$\Leftrightarrow 10t^2 + 22t + 4 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 11t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{5} \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn đề bài là $M_1\left(-\dfrac{3}{5} ; -\dfrac{1}{5}\right)$ và $M_2(3 ; -2)$.

5. a) Đường tròn (T) có tâm là điểm $(2 ; 1)$ và có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

b) Đường thẳng $l : x - y + m = 0$. Ta có :

l có điểm chung với (T)

$\Leftrightarrow d(I, l) \le R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-1+m|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow |m + 1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le m + 1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1.$

c) $\Delta \perp d$ nên Δ có phương trình $x + y + c = 0$.

Ta có : Δ tiếp xúc với (T) khi và chỉ khi

$d(I , \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2+1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |c + 3| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+3=2 \\ c+3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-1 \\ c=-5. \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với (T) thoả mãn đề bài là :

$\Delta_1 : x + y - 1 = 0$

$\Delta_2 : x + y - 5 = 0.$

6. a) (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$ nên $c = \sqrt{3}$.

Phương trình chính tắc của (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có : $M\left(1 ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \qquad (1)$$

và $\quad a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3.$

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{1}{b^2+3} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3b^2 + 9 = 4b^2(b^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1.$$

Suy ra $a^2 = 4$.

Ta có $a = 2$; $b = 1$.

Vậy (E) có bốn đỉnh là : $(-2 ; 0)$, $(2 ; 0)$,

$(0 ; -1)$ và $(0 ; 1)$.

b) Phương trình chính tắc của (E) là :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

c) (E) có tiêu điểm thứ hai là điểm $(\sqrt{3} ; 0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $(\sqrt{3} ; 0)$ và vuông góc với Ox có phương trình : $x = \sqrt{3}$.

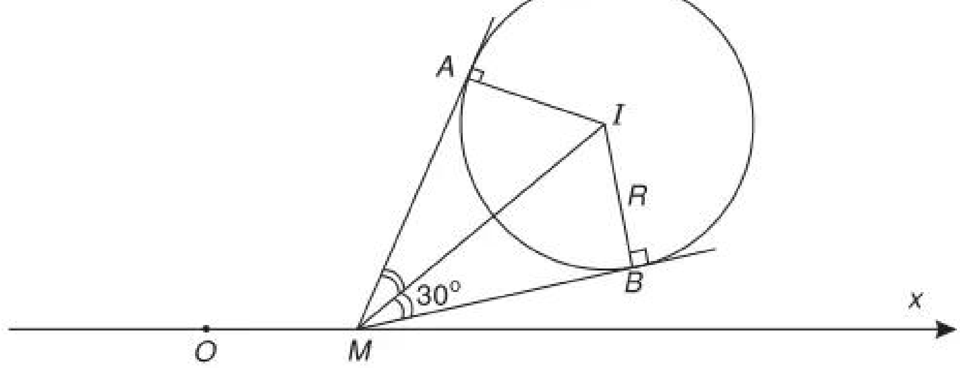
Phương trình tung độ giao điểm của Δ và (E) là :

$$\frac{3}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}.$$

Suy ra toạ độ của C và D là : $C\left(\sqrt{3} ; -\frac{1}{2}\right)$ và $D\left(\sqrt{3} ; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $CD = 1$.

7. (Xem hình 3.30)



Hình 3.30

Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3 ; 3)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{9 + 9 - 14} = 2.$$

Điểm $M(x ; 0)$ thuộc Ox.

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ tại A và B. Ta có :

$$\widehat{AMB} = 60^o \Rightarrow \widehat{IMB} = 30^o$$

$$\Rightarrow IM = \frac{R}{\sin 30^o} = 2R = 4.$$

$IM = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+9} = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$.

Vậy có hai điểm M thoả mãn đề bài, chúng có toạ độ là :

$M_1(3+\sqrt{7}\ ;\ 0)$ và $M_2(3-\sqrt{7}\ ;\ 0)$.

8. (Xem hình 3.31)

a) $R = 1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $K(1\ ;\ 3)$ và có hệ số góc m.

Δ có phương trình $y = m(x-1)+3$

$\Leftrightarrow mx - y + (3-m) = 0$.

Ta có Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+2+3-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 = 25$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}.$$

Vậy qua điểm K có hai tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$. Đó là :

$\Delta_1 : y = 2\sqrt{6}(x-1)+3$ và $\Delta_2 : y = -2\sqrt{6}(x-1)+3$.

b) Ta có $KI = \sqrt{(1-1)^2+(3+2)^2} = 5$

$KM_2 = \sqrt{KI^2 - R^2} = \sqrt{25 - R^2}$.

Ta có : $S_{KM_1IM_2} = 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow 2S_{IM_2K} = 2\sqrt{6}$

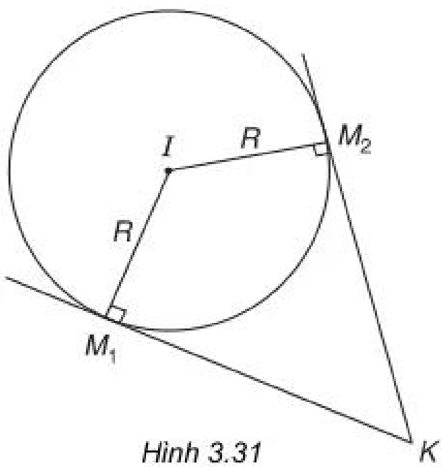
$\Leftrightarrow IM_2.KM_2 = 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow R.\sqrt{25-R^2} = 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow R^2(25-R^2) = 24$

$\Leftrightarrow R^4 - 25R^2 + 24 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R^2 = 1 \\ R^2 = 24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 1 \\ R = 2\sqrt{6} \end{array}\right.$



Hình 3.31

Vậy bán kính đường tròn bằng 1 hoặc $2\sqrt{6}$.

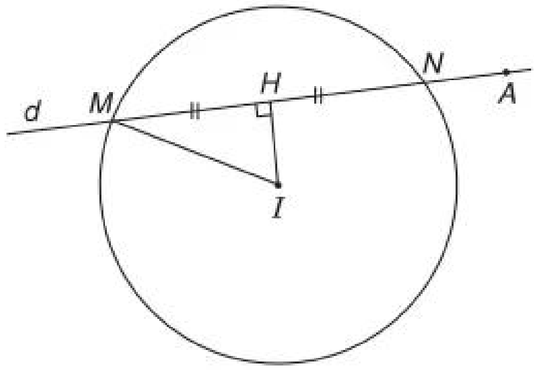
9. (Xem hình 3.32)

Đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm $I(5\ ;\ 3)$ và có bán kính $R = 2$.

Gọi H là trung điểm của MN. Ta có

$IH \perp MN$ và $MH = \dfrac{MN}{2} = \sqrt{3}$

$IH = \sqrt{IM^2 - MH^2} = \sqrt{4-3} = 1.$



Hình 3.32

Phương trình đường thẳng d có dạng :

$y - 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y + 2 - k = 0.$

Ta có $IH = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|5k - 3 + 2 - k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |4k - 1| = \sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow (4k-1)^2 = k^2 + 1$$

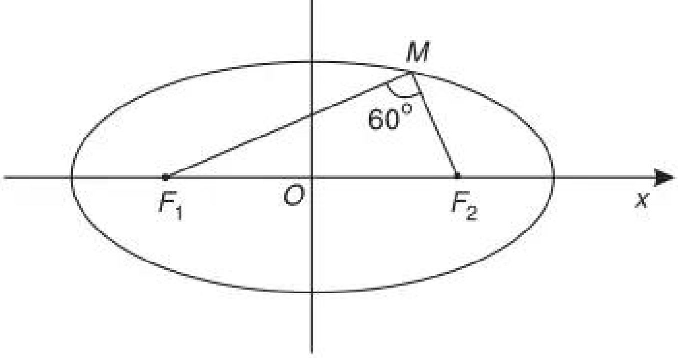
$$\Leftrightarrow 15k^2 - 8k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \dfrac{8}{15} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng d thoả mãn đề bài.

Đó là $d_1 : y - 2 = 0$

$d_2 : y - 2 = \dfrac{8}{15}(x - 1) \Leftrightarrow 8x - 15y + 22 = 0.$

10. (Xem hình 3.33)



Hình 3.33

Elip (E) có phương trình chính tắc : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Ta có : $a = 5$, $b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$.
Vậy $c = 4$.

Xét điểm $M(x\ ;\ y)$ thuộc elip, ta có $\begin{cases} F_1M = a+\dfrac{c}{a}x = 5+\dfrac{4}{5}x \\ F_2M = a-\dfrac{c}{a}x = 5-\dfrac{4}{5}x \end{cases}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác F_1MF_2 ta có :

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2\cos 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow\ 4c^2 = \left(5+\frac{4}{5}x\right)^2+\left(5-\frac{4}{5}x\right)^2-2\left(25-\frac{16}{25}x^2\right).\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 64 = 25+\frac{48}{25}x^2\ \Leftrightarrow\ x^2=\frac{25}{16}.13\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{5}{4}\sqrt{13}\qquad (1)$$

Ta lại có $M \in (E)\ \Rightarrow\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (2)

Thay (1) vào phương trình (2) ta được

$$\frac{y^2}{9}=1-\frac{13}{16}\ \Leftrightarrow\ y^2=\frac{9}{16}.3\ \Leftrightarrow\ y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Vậy có bốn điểm M thoả mãn đề bài. Chúng có toạ độ là $\left(\pm\dfrac{5}{4}\sqrt{13};\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

11. (Xem hình 3.34)

Ta có : $IB=\sqrt{(1-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

$IC=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{10}$

$IB = IC \Rightarrow AB = AC$.

Gọi M là trung điểm BC, ta có $M(3\ ;\ 3)$.

Phương trình đường thẳng IM : $x + y - 6 = 0$ (1)

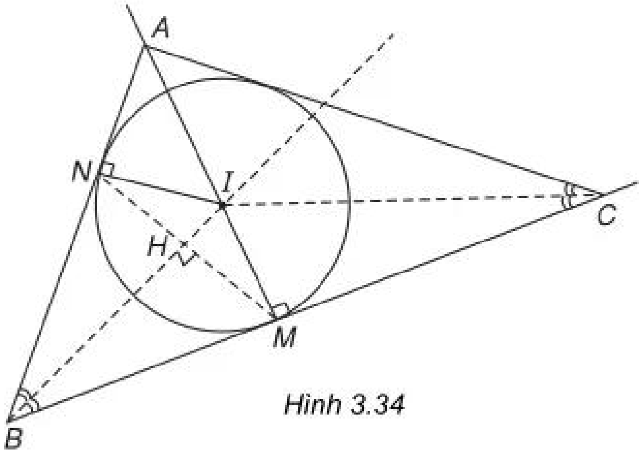
Phương trình đường thẳng IB : $3x - y - 2 = 0$ (2)

Gọi N là điểm đối xứng với M qua đường thẳng IB. Đặt $N(x\ ;\ y)$, ta có toạ độ trung điểm H của MN là $\left(\dfrac{x+3}{2};\dfrac{y+3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MN} = (x - 3\ ;\ y - 3)$

$\overrightarrow{BI} = (1\ ;\ 3)$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BI} = 0 \\ H \in IB \end{cases}$



Hình 3.34

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + 3(y - 3) = 0 \\ 3\left(\dfrac{x+3}{2}\right) - \left(\dfrac{y+3}{2}\right) - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{19}{5}. \end{cases}$

Vậy $N\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{19}{5}\right)$.

Ta có $B(1\ ;\ 1)$. Phương trình đường thẳng BN : $7x + y - 8 = 0$.

Điểm A là giao của hai đường thẳng BN và IM nên toạ độ của A là nghiệm của hệ phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y - 8 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{17}{3} \end{cases}$

Vậy toạ độ điểm A là $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{17}{3}\right)$.

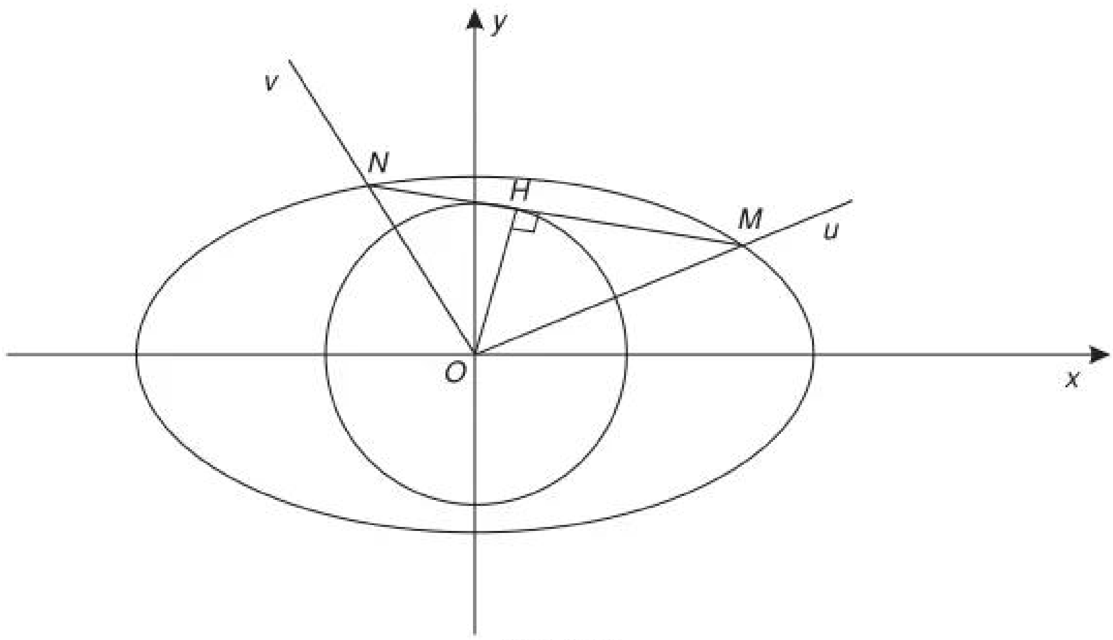
12. (Xem hình 3.35)

Gọi $y = kx$ và $y = -\dfrac{1}{k}x$ là phương trình của Ou và Ov.

Phương trình hoành độ giao điểm của Ou và elip (E)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_M^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + k^2a^2}.$$

Ta có : $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = x_M^2 + k^2x_M^2 = x_M^2(k^2 + 1) = \dfrac{a^2b^2(1 + k^2)}{b^2 + k^2a^2}$.



Hình 3.35

Suy ra : $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{b^2 + k^2a^2}{a^2b^2(1+k^2)}$.

Tương tự $\dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{b^2 + \dfrac{1}{k^2}a^2}{a^2b^2\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)} = \dfrac{a^2 + k^2b^2}{a^2b^2(1+k^2)}$.

Suy ra $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + k^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(1+k^2)} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

Vậy $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$ không đổi.

Vẽ đường cao OH của tam giác vuông OMN.

Ta có : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

Suy ra $OH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = R$ không đổi.

Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $R = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

13. (Xem hình 3.36)

Đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm $I(1\ ;\ 2)$ và có bán kính $R = 2$.

Ta có $x_A = x_I = x_B = 1$.

Suy ra A, I, B cùng thuộc đường thẳng có phương trình $x = 1$.

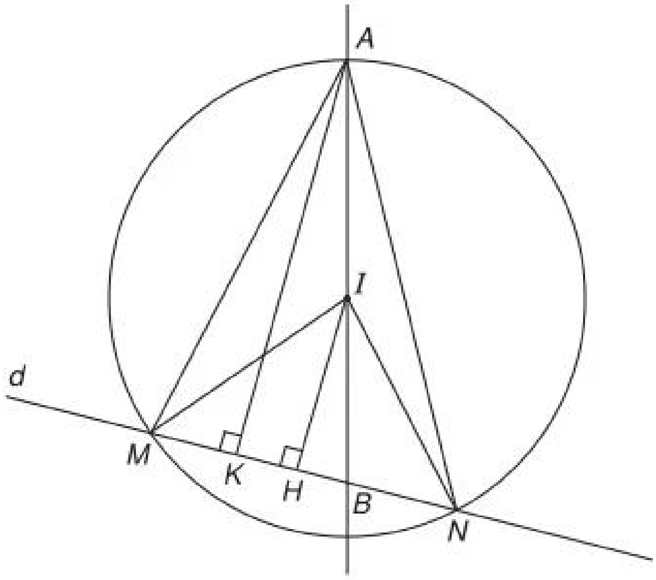
Ta có $\quad IA = \sqrt{(1-1)^2 + (4-2)^2} = 2 = R$

$$IB = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2} = \frac{3}{2} < R.$$

Suy ra điểm A nằm trên đường tròn và điểm B nằm trong hình tròn.

Gọi H và K là hình chiếu của I và A xuống đường thẳng d. Ta có

$$\frac{S_{AMN}}{S_{IMN}} = \frac{AK}{IH} = \frac{AB}{IB} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{3}.$$



Hình 3.36

Suy ra $S_{AMN} = \frac{7}{3} S_{IMN}$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} . IM . IN \sin MIN$$

$$= \frac{14}{3} \sin MIN \leq \frac{14}{3}.$$

S_{AMN} lớn nhất $\Leftrightarrow \sin MIN = 1 \Leftrightarrow \widehat{MIN} = 90^{\circ}$

$$\Leftrightarrow IH = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d(I, MN) = \sqrt{2}.$$

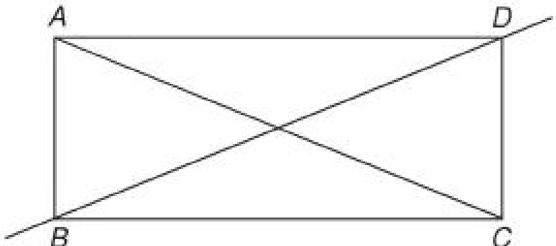
Phương trình đường thẳng MN là : $y - \frac{1}{2} = k(x-1) \Leftrightarrow 2kx - 2y + (1-2k) = 0$.

Ta có $d(I, MN) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2k - 4 + 1 - 2k|}{\sqrt{4k^2 + 4}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{8(k^2+1)} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy phương trình đường thẳng d là : $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$.

14. (Xem hình 3.37)



Hình 3.37

Đặt $A(1\ ;\ -5)$, $C(6\ ;\ 2)$ và BD có phương trình $5x + 7y - 7 = 0$.

Đặt $x_B = 7t$ ta có $y_B = 1 - 5t$.

Vậy $B(7t\ ;\ 1 - 5t)$.

Suy ra $\overrightarrow{BA} = (1 - 7t\ ;\ -6 + 5t)$

$\overrightarrow{BC} = (6 - 7t\ ;\ 1 + 5t)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (1 - 7t)(6 - 7t) + (1 + 5t)(-6 + 5t) = 0$

$$\Leftrightarrow 74t^2 - 74t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $B(0\ ;\ 1)$; $D(7\ ;\ -4)$ hoặc $B(7\ ;\ -4)$; $D(0\ ;\ 1)$.

15. (Xem hình 3.38)

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 5y - 33 = 0 & (AB) \\ 7x + y - 13 = 0 & (AH). \end{cases} \quad \text{Vậy } A(1\ ;\ 6).$$

Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 5y - 33 = 0 & (AB) \\ x + 6y - 24 = 0 & (BM). \end{cases} \quad \text{Vậy } B(6\ ;\ 3).$$

Đặt $C(x\ ;\ y)$ ta suy ra trung điểm M của AC có toạ độ $M\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y+6}{2}\right)$.

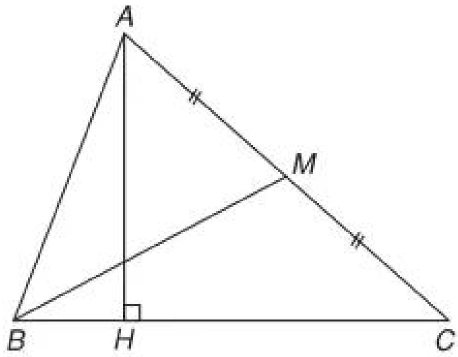
Ta có $\overrightarrow{BC} = (x - 6\ ;\ y - 3)$

$\vec{u}_{AH} = (1\ ;\ -7)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} M \in BM \\ \overrightarrow{BC}.\vec{u}_{AH} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2}\right) + 6\left(\dfrac{y+6}{2}\right) - 24 = 0 \\ x - 6 - 7(y - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y - 11 = 0 \\ x - 7y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$



Hình 3.38

Vậy $C(-1\ ;\ 2)$.

Phương trình cạnh BC : $x - 7y + 15 = 0$

Phương trình cạnh AC : $2x - y + 4 = 0$.

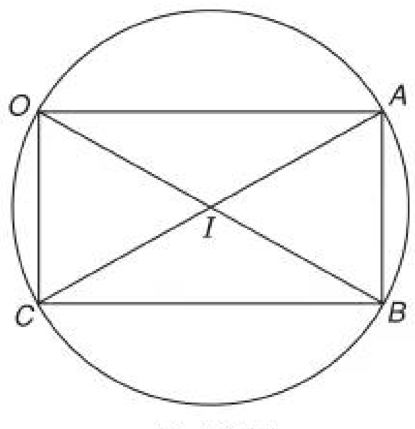
16. (Xem hình 3.39)

Đường tròn (T) có tâm $I\left(\frac{5}{2};0\right)$ và có bán kính $R = \frac{5}{2}$.

$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} = (5\ ;\ 0)$ suy ra $B(5\ ;\ 0)$. Đặt $A(x\ ;\ y)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}\\ \sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{(5-x)^2+y^2} = 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{25}{4} - \left(x-\frac{5}{2}\right)^2\\ \left[x^2+5x-x^2\right]\left[(5-x)^2+5x-x^2\right] = 144\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 5x - x^2\\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{9}{5}\\ y = \frac{16}{5}\end{array}\right.\end{cases}$$



Hình 3.39

Vậy ta được

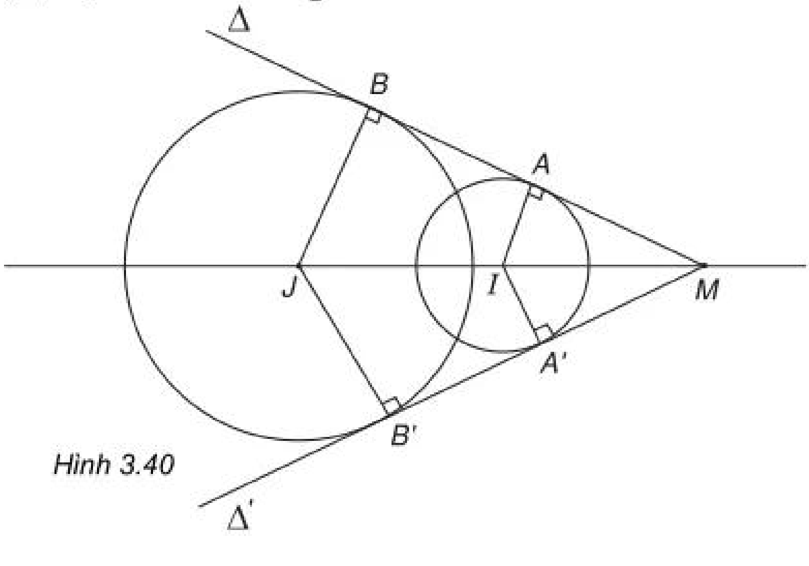
$A\left(\frac{9}{5};\frac{12}{5}\right)$, $\quad C\left(\frac{16}{5};\frac{-12}{5}\right)$

hoặc $A\left(\frac{9}{5};\frac{-12}{5}\right)$, $C\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right)$.

17. (Xem hình 3.40)

a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I(2\ ;\ 2)$ và bán kính $R_1 = 2$.

$(\mathscr{C}_2)$ có tâm $J(5\ ;\ 3)$ và bán kính $R_2 = 4$.



Hình 3.40

Ta có $IJ = \sqrt{(5-2)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$.

Do $R_2 - R_1 < IJ < R_2 + R_1$ nên $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau tại hai điểm.

b) Gọi Δ và Δ' là hai tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$. Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt tại A, B. Δ' tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt tại A', B'. Ta có

$$\begin{cases} d(I,\Delta) = d(I,\Delta') = R_1 = 2 \\ d(J,\Delta) = d(J,\Delta') = R_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow IJ,\ \Delta \text{ và } \Delta' \text{ đồng quy tại } M.$$

$$\frac{JM}{IM} = \frac{JB}{IA} = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{JI} \Rightarrow \begin{cases} x_M - 5 = 2.(2-5) \\ y_M - 3 = 2.(2-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 1. \end{cases}$$

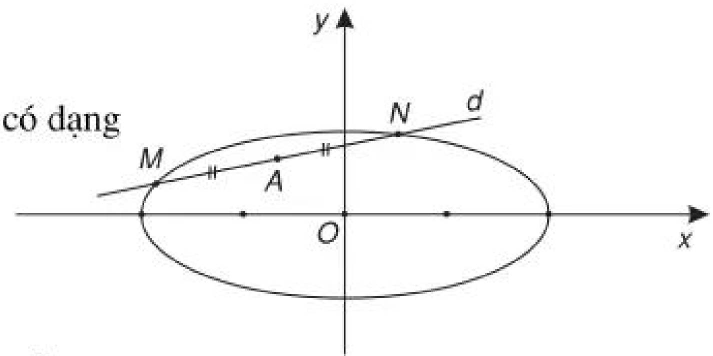
Vậy ta được $M(-1\ ;\ 1)$.

18. (Xem hình 3.41)

Phương trình đường thẳng d có dạng

$$y - \frac{1}{2} = m(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\ y = m(x+1) + \frac{1}{2}.$$



Hình 3.41

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (E) là :

$$\frac{x^2}{4} + \left(mx + m + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow\ x^2 + 4\left[mx + \left(m + \frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4$$

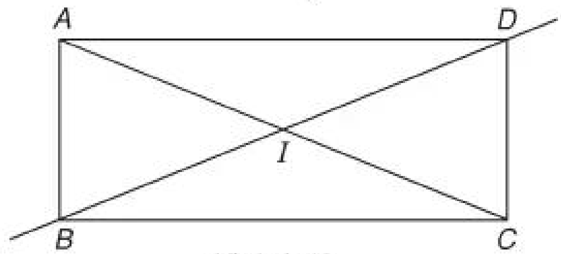
$$\Leftrightarrow (4m^2+1)x^2 + 4\left[(2m+1)m\right]x + 4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0.$$

A là trung điểm của $MN \Leftrightarrow \dfrac{x_M + x_N}{2} = x_A \Leftrightarrow \dfrac{-4(2m^2+m)}{2(4m^2+1)} = -1$

$$\Leftrightarrow\ 4m^2 + 2m = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow\ m = \frac{1}{2}.$$

19. (Xem hình 3.42)

Do toạ độ điểm A không thoả mãn phương trình đường thẳng $x - 7y + 15 = 0$ nên ta có phương trình đường chéo BD là : $x - 7y + 15 = 0$, toạ độ điểm B là $B(7t - 15\ ;\ t)$.



Hình 3.42

Ta có : $AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (7t-17)^2 + (t+1)^2 = 18$

$$\Leftrightarrow 50t^2 - 236t + 272 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{68}{25} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $B(-1\ ;\ 2)$.

Ta có $\vec{n}_{AD} = \overrightarrow{AB} = (-3\ ;\ 3) = -3(1\ ;\ -1)$.

Phương trình đường thẳng AD là :

$1.(x-2) - 1.(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.

Toạ độ điểm D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - 7y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $D(6\ ;\ 3)$.

Ta có AC và BD cắt nhau tại trung điểm I.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x_C + x_A}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{y_C + y_A}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 6. \end{cases}$

Vậy $C(3\ ;\ 6)$.

20. (Xem hình 3.43)

a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I(-5\ ;\ 0)$, bán kính $R_1 = 5$. $(\mathscr{C}_2)$ có tâm $J(2\ ;\ 1)$, bán kính $R_2 = 5$.

Toạ độ của giao điểm A, B của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 2y + 20 = 0 \\ x^2 + y^2 + 10x = 0 \end{cases}$$

ta được $A(-1\ ;\ -3)$, $B(-2\ ;\ 4)$.

Gọi K là tâm của $(\mathscr{C})$ ta có $KA = KB = R \Rightarrow K \in IJ$.

Phương trình IJ là : $x - 7y + 5 = 0$.

Toạ độ K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 7y + 5 = 0 \\ x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $K(-12\ ;\ -1)$. Ta có $R^2 = KA^2 = 125$.

Vậy phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) là : $(x + 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$.

b) $R_1 = R_2 = 5$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến chung l của($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) song song với IJ.

Phương trình l có dạng :

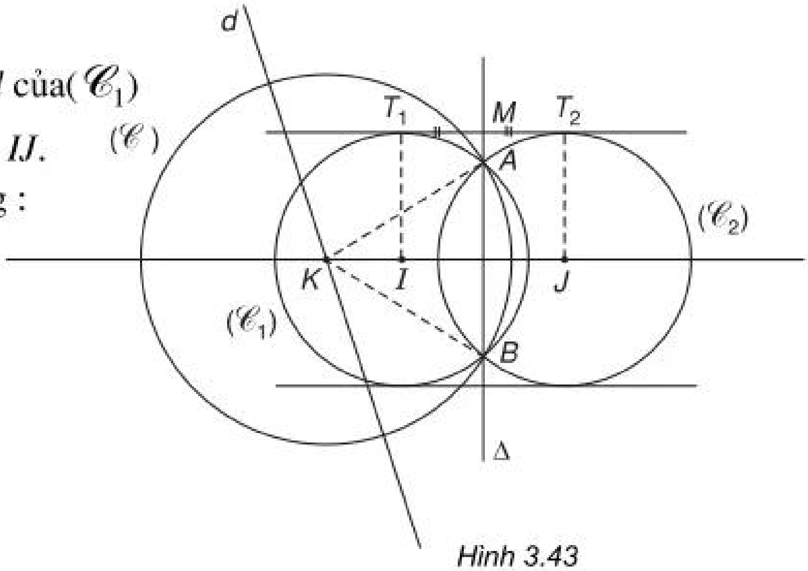
$x - 7y + c = 0$.

Ta có $d(I, l) = R_1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-5+c|}{\sqrt{1+49}} = 5$

$\Leftrightarrow |c-5| = 25\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow c = 5 \pm 25\sqrt{2}$.



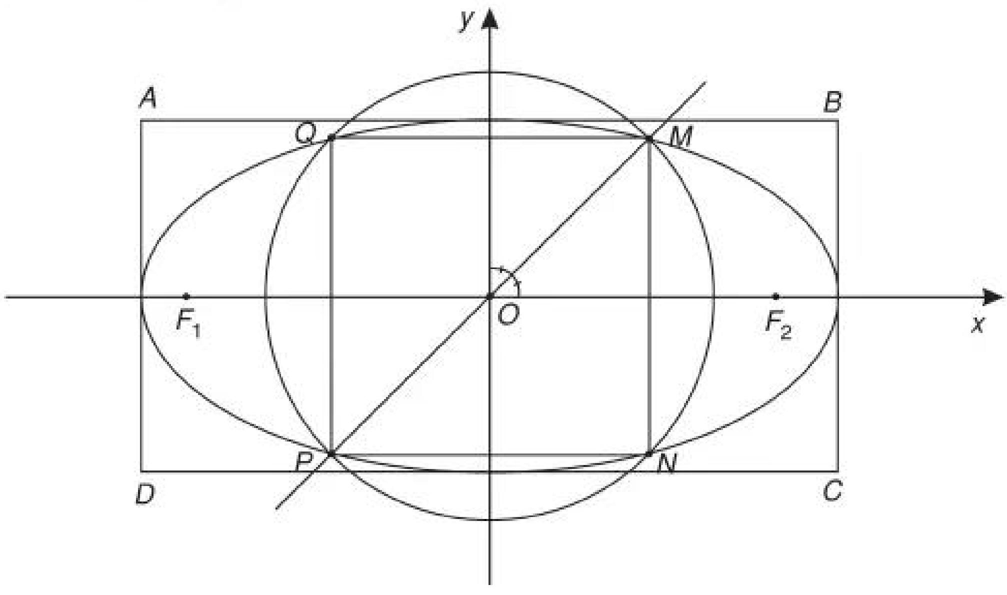
Hình 3.43

Vậy phương trình của hai tiếp tuyến chung của ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) là :

$x - 7y + 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$.

Đường thẳng AB đi qua trung điểm M của T_1T_2 và vuông góc với IJ.
Phương trình của AB là : $7x + y + 10 = 0$.

21. (Xem hình 3.44)



Hình 3.44

Phương trình elip có dạng (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có tiêu điểm $F_1(-2 ; 0)$. Suy ra $c = 2$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở $ABCD$ là 4ab. Suy ra $4ab = 12\sqrt{5}$.

Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$.

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} ab = 3\sqrt{5} \\ a^2 = b^2 + 4 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{5}. \end{cases}$

Vậy phương trình elip là : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm O, bán kính R cắt elip tại bốn điểm M, N, P, Q.

Ta có $MNPQ$ là hình vuông suy ra phương trình OM là : $y = x$.

Thay $y = x$ vào phương trình elip ta được $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x^2}{5} = 1 \Rightarrow x_M^2 = \dfrac{45}{14} = y_M^2$

$R^2 = OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \dfrac{45}{7}$.

Vậy phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) là : $x^2 + y^2 = \dfrac{45}{7}$.

22. (Xem hình 3.45)

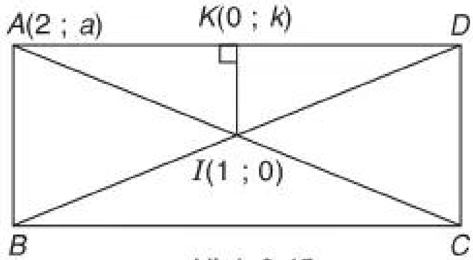
Đặt $A(2 ; a)$; $K(0 ; k)$; $C(0 ; c)$; $I(1 ; 0)$ là toạ độ các điểm đã cho ta có

$\dfrac{a+c}{2} = 0 \Rightarrow c = -a$.

$AD = 2AB \Rightarrow AK = 2KI$. Ta có : $\overrightarrow{AK} = (-2 ; k - a)$, $\overrightarrow{IK} = (-1 ; k)$

$\begin{cases} \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{IK} = 0 \\ |\overrightarrow{AK}| = 2|\overrightarrow{IK}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + k(k-a) = 0 \\ \overrightarrow{AK}^2 = 4\overrightarrow{IK}^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k - a = -\dfrac{2}{k} & (1) \\ 4 + (k-a)^2 = 4(1+k^2) & (2) \end{cases}$



Hình 3.45

Thay (1) vào (2) ta được

$4 + \dfrac{4}{k^2} = 4(1+k^2) \Leftrightarrow 4k^2 + 4 = 4k^2 + 4k^4 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = -1 \quad (k < 0)$.

Suy ra $a = -3$.

Vậy $A(2 ; -3)$, $C(0 ; 3)$ và $K(0 ; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 2.(0-2) \\ y_D + 3 = 2.(-1+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 1. \end{cases}$ Vậy $D(-2 ; 1)$

Ta có $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DI} \Rightarrow \begin{cases} x_B + 2 = 2.(1+2) \\ y_B - 1 = 2.(0-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 4 \\ y_B = -1. \end{cases}$ Vậy $B(4 ; -1)$.

II- ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1

Câu 1. a) Ta có $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ suy ra $B(-2 ; 2)$.

Đường thẳng AC đi qua điểm $I(-1 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OI} = (-1 ; 1)$ nên có phương trình : $x - y + 2 = 0$.

Toạ độ A và C có dạng $(t ; t + 2)$.

Ta có : $OA^2 = OC^2 = 10$ suy ra $t = 1$ hay $t = -3$. Suy ra $A(1 ; 3)$ và $C(-3 ; -1)$.

b) Tam giác ABC cân tại B, suy ra điểm D thuộc đường thẳng OB có phương trình : $x + y = 0$.

Đặt $D(t ; -t)$ ta có $\overrightarrow{BA} = (3 ; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (t - 1 ; - t - 3)$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 3(t - 1) - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Vậy $D(3 ; -3)$.

Câu 2. a) $M \in (E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9}{5a^2} + \dfrac{16}{5b^2} = 1$ (1)

$\widehat{F_1MF_2} = 90^{\circ} \Leftrightarrow OM^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5$ (2)

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được $a^2 = 9$; $b^2 = 4$.

Vậy (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) $2c = 2\sqrt{5}$; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Đề 2

Câu 1. a) $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4.$

(E) có hai tiêu điểm là $F_1(-4 ; 0)$; $F_2(4 ; 0)$ và có bốn đỉnh là $A_1(-5 ; 0)$; $A_2(5 ; 0)$; $B_1(0 ; -3)$; $B_2(0 ; 3)$.

b) Gọi toạ độ M là $(x ; y)$ ta có

$$\begin{cases} M \in (E) \\ \widehat{F_1MF_2} = 90^{\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{175}{16} \\ y^2 = \dfrac{81}{16} \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm thoả mãn đề bài, chúng có toạ độ là $\left(\pm\dfrac{5\sqrt{7}}{4}; \pm\dfrac{9}{4}\right)$.

Câu 2. a) $M'\left(-\dfrac{7}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$; b) $\Delta' : 3x - 4y - 21 = 0$;

c) $(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$

Đề 3

Câu 1. a) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$ suy ra $A(0 ; 2)$.

b) $\begin{cases} BC \perp MA \\ MB = MC = MA. \end{cases}$

Suy ra $B(-2 ; -2)$; $C(4 ; 0)$ hay $B(4 ; 0)$; $C(-2 ; -2)$.

c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10.$

Câu 2. a) $2a = 8$; $2b = 6$; $2c = 2\sqrt{7}$.

b) Phương trình Δ có dạng : $y = k(x-1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) :

$$9x^2 + 16\,[k(x-1)+2]^2 - 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9 + 16k^2)x^2 + 32k(2-k)x + 16(2-k)^2 - 144 = 0$$

A là trung điểm $M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_A \Leftrightarrow \dfrac{16k(k-2)}{9+16k^2} = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{-9}{32}.$

Vậy phương trình của Δ là : $9x + 32y - 73 = 0$.