VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các đẳng thức về vectơ có liên quan đến tích vô hướng

1. Phương pháp

• Sử dụng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng các vectơ.

• Dùng quy tắc ba điểm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ hay quy tắc hiệu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng với điểm *M* tuỳ ý ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0.$$

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ (3)

Cộng các kết quả từ (1), (2), (3) ta được :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0.$$

Ví dụ 2. Cho *O* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* và *M* là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})$

$$=\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}.\underbrace{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}_{\vec{0}}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2$$

(vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}^2$).

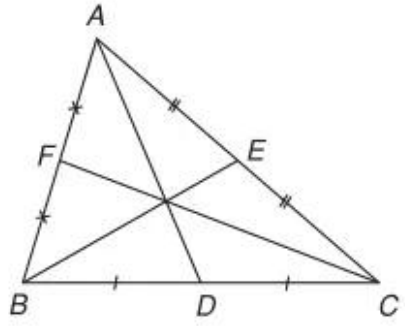
Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$ (vì $\overrightarrow{OA}^2=OA^2$, $\overrightarrow{MO}^2=OM^2$).

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* với ba trung tuyến là *AD*, *BE*, *CF*.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (h.2.10).



Hình 2.10

Do đó $2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$. (1)

Tương tự $2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$ (2)

$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$2(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}) = 0$$

hay $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

VẤN ĐỀ 3

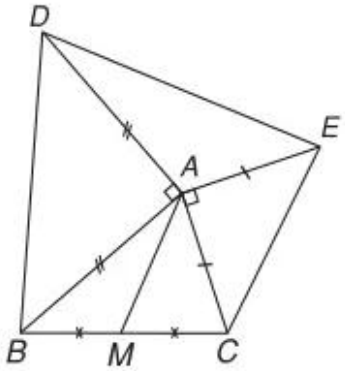
Chứng minh sự vuông góc của hai vectơ và hai đường thẳng

1. Phương pháp

Sử dụng tính chất của tích vô hướng : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* có góc *A* nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác *ABC* các tam giác vuông cân đỉnh *A* là *ABD* và *ACE*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh rằng *AM* vuông góc với *DE*.



Hình 2.11

GIẢI

Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 0$ (h.2.11).

Ta có

$$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

$$= AB.AE.\cos(90^o + A) - AC.AD\cos(90^o + A)$$

$$= 0$$

(vì $AB = AD$, $AE = AC$).

Vậy $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE}$ suy ra AM vuông góc với DE.

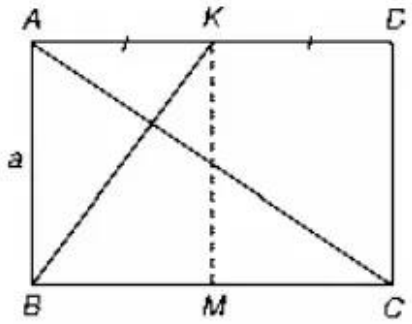
Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BK}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Cần chứng minh $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$ (h.2.12).



Hình 2.12

Ta có $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Vậy $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$

Do đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$. Ta có $\overrightarrow{BK}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$.

VẤN ĐỀ 4

Biểu thức toạ độ của tích vô hướng và các ứng dụng : tính độ dài của một vectơ, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ

1. Phương pháp

• Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$. Ta có $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

• Cho vectơ $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$. Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

• Cho hai điểm $A = (x_A ; y_A)$, $B = (x_B ; y_B)$.

Ta có $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

• Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng *Oxy* cho $A = (4 ; 6)$, $B = (1 ; 4)$, $C = (7 ; \frac{3}{2})$.

a) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông tại *A*.

b) Tính độ dài các cạnh *AB*, *AC* và *BC* của tam giác đó.

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3 ; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3 ; -\frac{9}{2})$ và

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-3).3 + (-2).\left(-\frac{9}{2}\right) = 0.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$ và tam giác *ABC* vuông tại *A*.

b) $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$,

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}.$$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (6 ; -\frac{5}{2})$ và

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2}.$$

Nhận xét. Có thể chứng minh tam giác *ABC* vuông tại *A* bằng cách chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ví dụ 2. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = (1 ; -2)$, $\vec{b} = (-1 ; -3)$;

b) $\vec{a} = (3 ; -4)$, $\vec{b} = (4 ; 3)$;

c) $\vec{a} = (2 ; 5)$, $\vec{b} = (3 ; -7)$.

GIẢI

a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1.(-1)+(-2).(-3)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+9}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^{o}$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{3.4+(-4).3}{\sqrt{9+16}.\sqrt{16+9}} = \dfrac{0}{25} = 0$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^{o}$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = \dfrac{-29}{29\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^{o}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng *Oxy* cho hai điểm *A*(2 ; 4) và *B*(1 ; 1). Tìm toạ độ điểm *C* sao cho tam giác *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*.

GIẢI

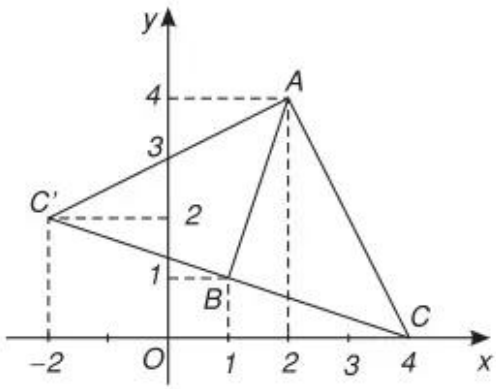
Giả sử điểm *C* cần tìm có toạ độ là $(x ; y)$. Để ΔABC vuông cân tại *B* ta phải có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

với $\overrightarrow{BA} = (1 ; 3)$ và $\overrightarrow{BC}$ $(x-1 ; y-1)$.

Điều đó có nghĩa là :

$$\begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1) = 0 \\ 1^2+3^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$$



Hình 2.13

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ (3-3y)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 20y = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được toạ độ hai điểm C và C' thoả mãn điều kiện của bài toán :

$C = (4 ; 0)$ và $C' = (-2 ; 2)$ (h.2.13).

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ khi nào dương, khi nào âm và khi nào bằng 0 ?

2.14. Áp dụng tính chất giao hoán và tính chất phân phối của tích vô hướng hãy chứng minh các kết quả sau đây :

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} \ ;$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \ ;$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 .$$

2.15. Tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

2.16. Cho tam giác ABC có $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ rồi suy ra giá trị của góc A ;

b) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2.17. Tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 11$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và chứng tỏ rằng tam giác ABC có góc A tù.

b) Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = 2$ cm và gọi N là trung điểm của cạnh AC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

2.18. Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Gọi H là trung điểm của cạnh BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AC, M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.

2.19. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ và suy ra góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

2.20. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

2.21. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

2.22. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

2.23. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A = (2 ; 4)$, $B = (-3 ; 1)$ và $C = (3 ; -1)$. Tính :

a) Toạ độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ;

b) Toạ độ chân A' của đường cao vẽ từ đỉnh A.

2.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A = (-1 ; 1)$, $B = (1 ; 3)$ và $C = (1 ; -1)$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

2.25. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(-1 ; 1)$, $B(0 ; 2)$, $C(3 ; 1)$ và $D(0 ; -2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

2.26. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1 ; -1)$, $B(3 ; 1)$ và $C(6 ; 0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính góc B của tam giác ABC.

2.27. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(5 ; 4)$ và $B(3 ; -2)$. Một điểm M di động trên trục hoành Ox. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$.

2.28. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(3 ; 4)$, $B(4 ; 1)$, $C(2 ; -3)$, $D(-1 ; 6)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

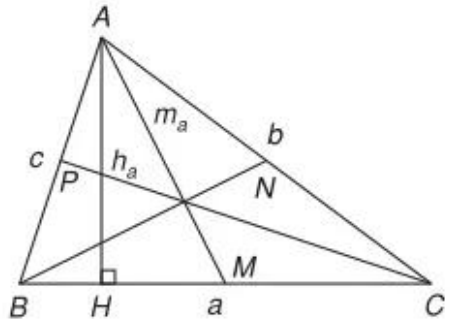
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, đường cao $AH = h_a$ và các đường trung tuyến $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CP = m_c$ (h.2.14).

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



Hình 2.14

Hệ quả :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

4. Các công thức tính diện tích tam giác

Diện tích S của tam giác ABC được tính theo các công thức :

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ với h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao của tam giác ABC.
- $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$;
- $S = \frac{abc}{4R}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;
- $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ;
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (công thức Hê-rông).

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tính một số yếu tố trong tam giác theo một số yếu tố cho trước (trong đó có ít nhất là một cạnh)

1. Phương pháp

- Sử dụng trực tiếp định lí côsin và định lí sin.
- Chọn các hệ thức lượng thích hợp đối với tam giác để tính một số yếu tố trung gian cần thiết để việc giải toán thuận lợi hơn.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $b = 7$ cm, $c = 5$ cm và $\cos A = \frac{3}{5}$.

a) Tính a, $\sin A$ và diện tích S của tam giác ABC.

b) Tính đường cao h_a xuất phát từ đỉnh A và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

GIẢI

a) Theo định lí côsin ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ (vì } \sin A > 0).$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5} = 14 \text{ (cm}^2).$$

b) $h_a = \dfrac{2.S}{a} = \dfrac{28}{4\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Theo định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* biết $\widehat{A} = 60^o$, *b* = 8 cm, *c* = 5 cm.

Tính đường cao h_a và bán kính *R* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$= 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^o = 49.$$

Vậy $a = 7$ (cm).

Theo công thức tính diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ta có :

$$S = \frac{1}{2}.8.5.\sin 60^o = \frac{1}{2}.8.5.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm}^2).$$

Mặt khác $S = \dfrac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{20\sqrt{3}}{7}$ (cm).

Từ công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$ ta có $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{7.8.5}{40\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ (cm).