

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I- CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.37. a) $G\left(-1 ; -\frac{4}{3}\right)$, $H(11 ; -2)$, $I(-7 ; -1)$.

b) $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ suy ra I, G, H thẳng hàng.

c) $(x+7)^2 + (y+1)^2 = 85$.

3.38. a) $A \in \Delta$; $B \notin \Delta$.

b) Δ cắt Ox tại $M(2 ; 0)$;

Δ cắt Oy tại $N\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$.

c) Vì $M \in \Delta$ nên toạ độ của M có dạng $(2 - 3t ; t)$

$$\overrightarrow{BM} = (-3t ; t - 1)$$

$$\vec{u}_{\Delta} = (-3; 1).$$

Ta có : BM ngắn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{u}_{\Delta} \Leftrightarrow 9t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}$.

Vậy điểm M thoả mãn đề bài có toạ độ là $\left(\frac{17}{10}; \frac{1}{10}\right)$.

3.39. $AB : x + 2y - 3 = 0$;

$AD : 2x - y - 6 = 0$;

$BC : 2x - y + 9 = 0$.

3.40. (h.3.11) a) Ta có $\Delta(O) = 2 > 0$

$$\Delta(A) = 2 + 2 > 0.$$

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với Δ .

b) Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ , ta có :

$$OM + MA = O'M + MA \geq O'A$$

Ta có : $OM + MA$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow O', M, A$ thẳng hàng.

Xét đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ . Phương trình của d là :

$$x + y = 0.$$

d cắt Δ tại $H(-1; 1)$.

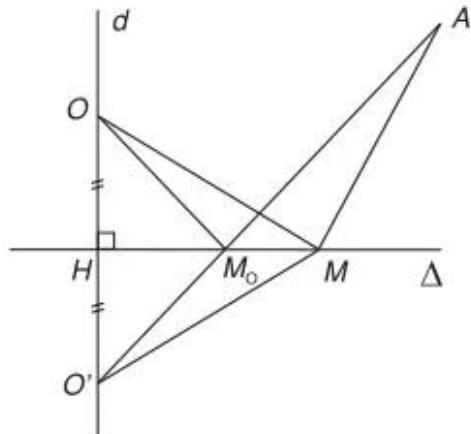
H là trung điểm của OO' , suy ra $O'(-2; 2)$.

Fương trình đường thẳng $O'A$ là : $x + 2y - 2 = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$ ta được $M = \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

3.41. a) (\mathcal{C}) : $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$.

b) (\mathcal{C}) có tâm $I\left(\frac{25}{6}; \frac{19}{6}\right)$ và có bán kính $R = \sqrt{\frac{85}{18}}$.



Hình 3.11

3.42. a) (1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2. \end{cases}$$

b) (\mathcal{C}_m) có tâm $I(x ; y)$ thoả mãn $\begin{cases} x = m \\ y = 2(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x - 4.$

Vậy tập hợp các tâm của (\mathcal{C}_m) là một phần của đường thẳng $\Delta : y = 2x - 4$ thoả mãn điều kiện giới hạn : $x < 1$ hay $x > 2$.

3.43. a) $(E) : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$;

b) $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3.44. $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a^2 &= 25, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \\ &\Rightarrow c = 4. \end{aligned}$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$. Ta có :

$$d_1 = d(F_1, \Delta) = \frac{|-4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d_2 = d(F_2, \Delta) = \frac{|4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\text{Suy ra } d_1 \cdot d_2 = \frac{|C^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2}. \quad (1)$$

Thay $C^2 = 25A^2 + 9B^2$ vào (1) ta được :

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{|25A^2 + 9B^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2} = \frac{9(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2}.$$

Vậy $d_1 \cdot d_2 = 9$.

3.45. a) $(E) : x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Ta có $a^2 = 16, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 12$
 $\Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$

Vậy (E) có hai tiêu điểm : $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$ và $F_2(2\sqrt{3}; 0)$
 và các đỉnh $A_1(-4; 0), A_2(4; 0)$
 $B_1(0; -2), B_2(0; 2).$

b) Phương trình Δ có dạng :

$$1.(x - 1) + 2.(y - \frac{1}{2}) = 0 \text{ hay } x + 2y - 2 = 0.$$

c) Toạ độ của giao điểm của Δ và (E) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ x = 2 - 2y. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Thay (2) vào (1) ta được :

$$\begin{aligned} (2 - 2y)^2 + 4y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow (1 - y)^2 + y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm y_A, y_B thoả mãn

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = y_M.$$

Vậy $MA = MB.$

Ta có $y_A = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, y_B = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$$x_A = 1 + \sqrt{7}, x_B = 1 - \sqrt{7}.$$

Vậy A có toạ độ là $\left(1 + \sqrt{7}; \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$, B có toạ độ là $\left(1 - \sqrt{7}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

II- ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

- 3.46.** a) Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với d có phương trình $\Delta : x + y + C = 0$.
 Δ qua M nên $C = -3$. Vậy $\Delta : x + y - 3 = 0$.

Toạ độ tâm I của đường tròn (\mathcal{C}) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(4; -1).$$

Bán kính $R = IM = 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn cần tìm có tâm $I(4; -1)$ và có bán kính $R = 2\sqrt{2}$ là : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$.

- b) Đường thẳng $m : x - y + 3 = 0$. Tiếp tuyến Δ' với (\mathcal{C}) vuông góc với đường thẳng m nên Δ' có phương trình : $x + y + c = 0$.

Δ' là tiếp tuyến với $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d[I; \Delta'] = R$

$$\Leftrightarrow d[I; \Delta'] = R \Leftrightarrow \frac{|4 - 1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -7 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến với (\mathcal{C}) thoả mãn yêu cầu bài toán có phương trình là :

$$\begin{cases} \Delta'_1 : x + y + 1 = 0 \\ \Delta'_2 : x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

- 3.47.** Gọi $I(a; b)$ là tâm của (\mathcal{C}) .

$\overrightarrow{AI} = (a - 1; b + 6)$; $\overrightarrow{BI} = (a + 2; b - 3)$; $\overrightarrow{u_\Delta} = (-1; 2)$ là vectơ chỉ phương của Δ .

$$\text{Ta có : } IA = IB = R \text{ và } IB \perp \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + (b + 6)^2 = (a + 2)^2 + (b - 3)^2 \\ -1 \cdot (a + 2) + 2 \cdot (b - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 18b = 24 \\ -a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = -12 \end{cases}$$

Khi đó $R^2 = AI^2 = (-33)^2 + (-6)^2 = 1125$.

Vậy $(\mathcal{C}) : (x + 32)^2 + (y + 12)^2 = 1125$.

- 3.48. a)** (\mathcal{C}) có tâm $I(3; -2)$ và $R = 5$.

b) Tiếp tuyến Δ song song với $d \Rightarrow \Delta : 5x + 12y + c = 0$ ($c \neq -2012$)

Δ tiếp xúc với $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot (-2) + c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 5 \Leftrightarrow |c - 9| = 65 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 74 \\ c = -56 \end{cases}$$

Vậy $\Delta : 5x + 12y + 74 = 0$ hay $\Delta : 5x + 12y - 56 = 0$.

3.49. Ta có $a = 8$; $b = 4\sqrt{3}$; $c = 4$; $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \quad (1); F_1 M = 8 + \frac{x}{2}; F_2 M = 8 - \frac{x}{2}.$$

Theo giả thiết ta có: $8 + \frac{x}{2} + 2\left(8 - \frac{x}{2}\right) = 26 \Leftrightarrow 24 - \frac{x}{2} = 26 \Leftrightarrow x = -4$.

Thay vào (1) được $\frac{16}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm 6$.

Vậy $M(-4; \pm 6)$.

3.50. a) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow (\mathcal{C})$ có $\begin{cases} I(1; 3) \\ \text{bán kính } R = 2 \end{cases}$

$IM = \sqrt{2} < R \Rightarrow M$ nằm trong (\mathcal{C}) .

b) Đường thẳng (d) cắt đường tròn (\mathcal{C}) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow d \perp IM$ tại M .

Phương trình đường thẳng d : $\begin{cases} \text{qua } M(2; 4) \\ \text{nhận } \overrightarrow{IM} = (1; 1) \text{ làm vectơ pháp tuyến} \end{cases}$

$$\Rightarrow d: 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow d: x + y - 6 = 0.$$

3.51. $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Ta có: $\begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4.$$

Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 10$; Độ dài trục bé: $B_1B_2 = 2b = 6$.

Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 8$.

$$\text{b) } M \text{ thuộc } (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 5 + \frac{4}{5}x \\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x = 5 - \frac{4}{5}x \end{cases}$$

$$\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{8}{F_1 F_2} \Leftrightarrow 25 - \frac{16}{25}x^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{5\sqrt{15}}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4}.$$

Vậy : có bốn điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là : $M\left(\pm \frac{5\sqrt{15}}{4}; \pm \frac{3}{4}\right)$.

3.52. (Xem hình 3.12)

a) Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

b) Diện tích tam giác IAB là :

$$S = \frac{1}{2}IA \cdot IB \sin AIB \leq \frac{1}{2}R^2 = 1.$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow S = 1$

$$\Leftrightarrow \sin AIB = 1$$

$$\Leftrightarrow IA \perp IB$$

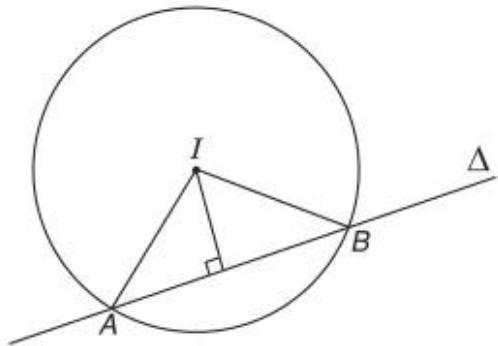
$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4m)^2 = 1 + m^2$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = \frac{8}{15}.$$



Hình 3.12

3.53. (Xem hình 3.13)

a) Gọi H là hình chiếu của A trên Δ , suy ra H là trung điểm BC .

$$AH = d(A, BC) = \frac{9}{\sqrt{2}};$$

$$\text{b)} BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AH} = 4\sqrt{2}.$$

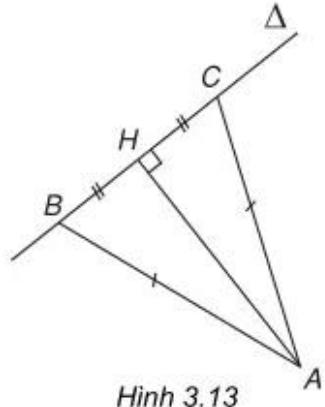
$$AB = AC = \sqrt{AH^2 + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{97}{2}}.$$

Toạ độ điểm B và C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{2} \\ x - y - 4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $(x; y) = \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

Vậy $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$.



Hình 3.13

3.54. (Xem hình 3.14)

Gọi N là điểm đối xứng với M qua I , suy ra $N(11; -1)$ và điểm N thuộc đường thẳng CD .

$E \in \Delta \Rightarrow E(x; 5-x); \overrightarrow{IE} = (x-6; 3-x)$ và $\overrightarrow{NE} = (x-11; 6-x)$.

E là trung điểm $CD \Rightarrow IE \perp EN$.

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{NE} = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x-11) + (3-x)(6-x) = 0$$

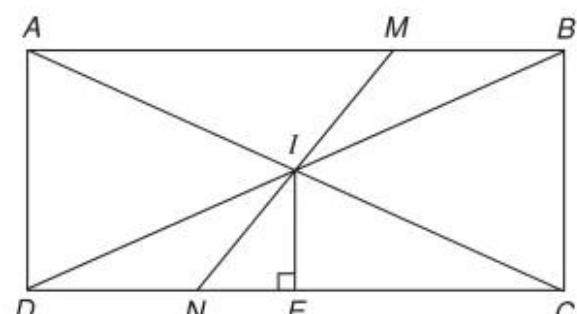
$$\Leftrightarrow x=6 \text{ hoặc } x=7.$$

Với $x=6 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (0; -3)$,

phương trình $AB : y-5=0$.

Với $x=7 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (1; -4)$,

phương trình $AB : x-4y+19=0$.



Hình 3.14

3.55. (Xem hình 3.15)

Gọi $K(a; b); K \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ (1);

(C_1) tiếp xúc $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}}$ (2).

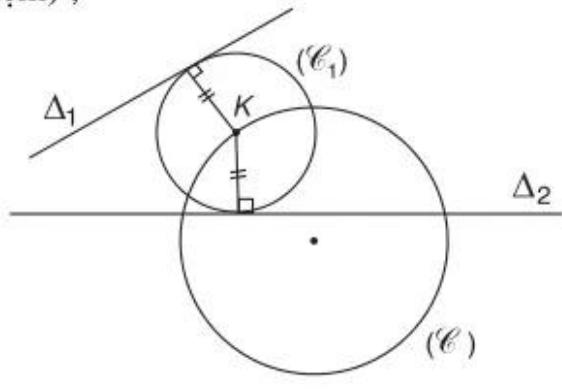
Từ (1) và (2) cho ta :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5|a-b| = |a-7b| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 & (\text{I}) \\ 5(a-b) = a-7b & (\text{II}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 - 20a + 16 = 0 \\ b = -2a \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm});$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 2b \\ 25b^2 - 40b + 16 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (a; b) = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Bán kính } (\mathcal{C}_1) : R = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$



Hình 3.15

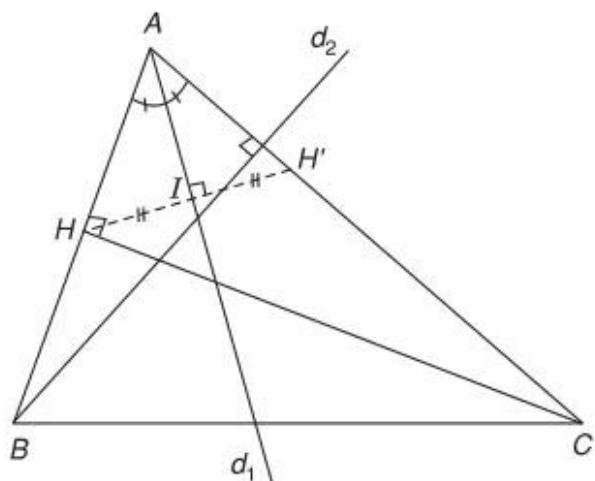
$$\text{Vậy : } K \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5} \right) \text{ và } R = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

- 3.56.** Ta gọi $d_1 : x - y + 2 = 0$ và $d_2 : 4x + 3y - 1 = 0$. Gọi $H'(a; b)$ là điểm đối xứng của H qua d_1 . Khi đó H' thuộc đường thẳng AC (h.3.16).

$\vec{u} = (1; 1)$ là vectơ chỉ phương của d_1 , $\overrightarrow{HH'} = (a+1; b+1)$ vuông góc với \vec{u} và trung điểm $I \left(\frac{a-1}{2}; \frac{b-1}{2} \right)$ của HH' thuộc d_1 .

Do đó toạ độ của H' là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 1.(a+1) + 1.(b+1) = 0 \\ \frac{a-1}{2} - \frac{b-1}{2} + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H'(-3; 1).$$



Hình 3.16

Đường thẳng AC đi qua H' vuông góc với d_2 nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{v} = (3; -4)$, suy ra AC có phương trình là :

$$3(x + 3) - 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 13 = 0.$$

Toạ độ của A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow A(5; 7).$$

Đường thẳng CH đi qua $H(-1; -1)$ với vectơ pháp tuyến là $\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = (3; 4)$

nên có phương trình là : $3(x + 1) + 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 7 = 0$.

Toạ độ của C là nghiệm của hệ phương trình

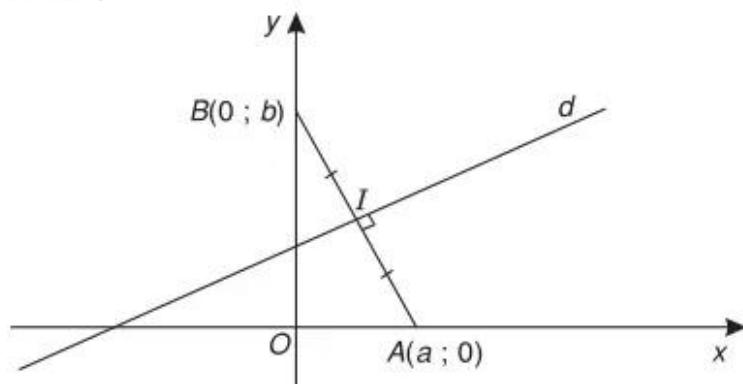
$$\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right).$$

3.57. $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(2t + 3; t)$.

Khoảng cách từ M đến Δ_2 là $d(M, \Delta_2) = \frac{|2t + 3 + t + 1|}{\sqrt{2}}$.

$d(M, \Delta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{5}{3} \end{cases}$. Vậy $M(1; -1)$ hoặc $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

3.58. (Xem hình 3.17)



Hình 3.17

$A \in Ox, B \in Oy \Rightarrow A(a; 0), B(0; b), \overrightarrow{AB} = (-a; b)$.

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 1)$.

Toạ độ trung điểm I của AB là $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

A và B đối xứng với nhau qua d khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ \frac{a}{2} - b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy $A(2; 0), B(0; 4)$.

3.59. (Xem hình 3.18)

Ta có $M(-1; 0), N(1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$.

Giả sử $H(x; y)$. Ta có :

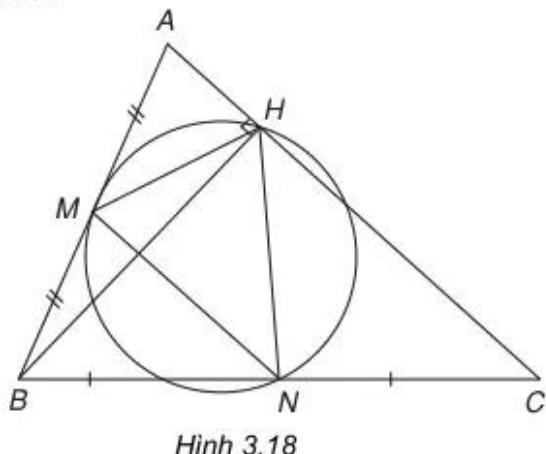
$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ H \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4x + 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 1).$$

Giả sử phương trình đường tròn cần tìm là :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (1).$$

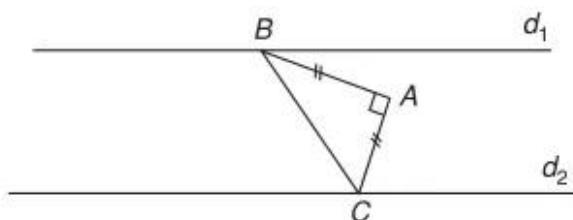
Thay toạ độ của M, N, H vào (1) ta có
hệ điều kiện :

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2a - 4b + c = -5 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2. \end{cases}$$



Vậy phương trình đường tròn cần tìm là : $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

3.60. (Xem hình 3.19)



Hình 3.19

Vì $B \in d_1$, $C \in d_2$ nên $B(b; 2-b)$, $C(c; 8-c)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3. \end{cases}$$

Đặt $x = b - 1$, $y = c - 4$ ta có hệ :

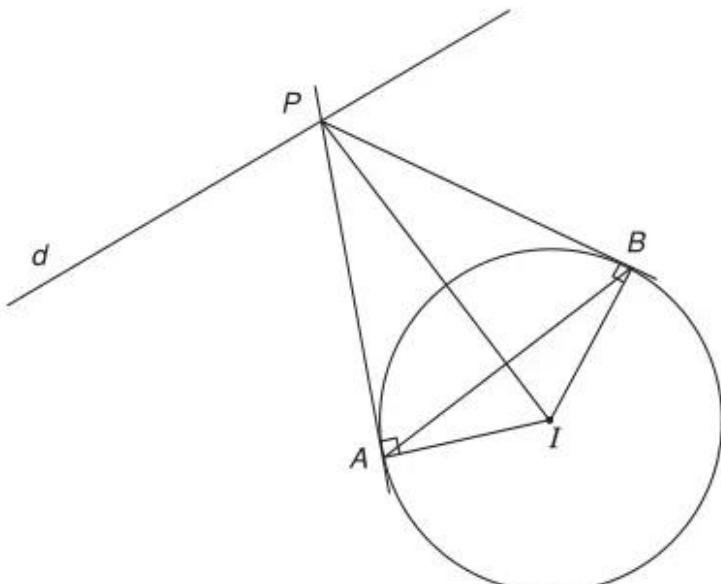
$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $B(-1; 3)$, $C(3; 5)$ hoặc $B(3; -1)$, $C(5; 3)$.

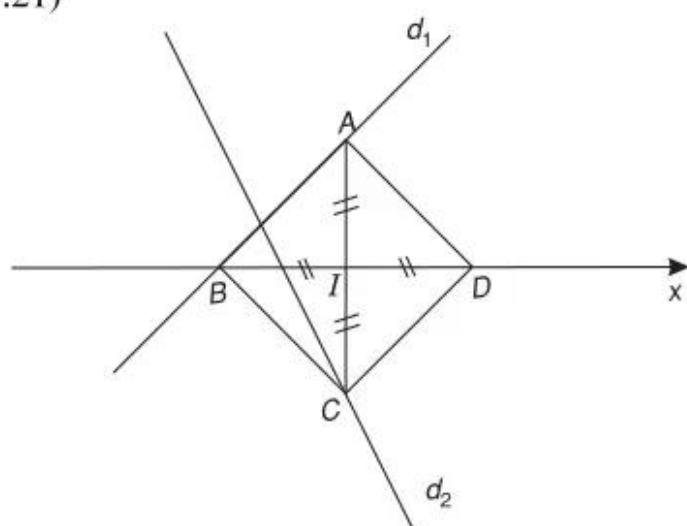
3.61. (Xem hình 3.20)

(C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$. Ta có tam giác PAB đều thì $IP = 2IA = 2R = 6 \Leftrightarrow P$ thuộc đường tròn (C') tâm I , bán kính $R' = 6$.

Trên d có duy nhất một điểm P thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi d tiếp xúc với (C') tại P
 $\Leftrightarrow d(I, d) = 6$
 $\Leftrightarrow m = 19, m = -41$.



Hình 3.20



Hình 3.21

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(t; t)$.

Vì A và C đối xứng nhau qua BD và $B, D \in Ox$ nên $C(t; -t)$.

Vì $C \in d_2$ nên $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1; 1), C(1; -1)$.

Trung điểm của AC là $I(1; 0)$. Vì I là tâm hình vuông nên $\begin{cases} IB = IA = 1 \\ ID = IC = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} B \in Ox \\ D \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(b; 0) \\ D(d; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |b - 1| = 1 \\ |d - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, b = 2 \\ d = 0, d = 2 \end{cases}$$

Suy ra $B(0; 0)$ và $D(2; 0)$ hoặc $B(2; 0)$ và $D(0; 0)$.

Vậy bốn đỉnh của hình vuông là $A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$, hoặc $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$.

- 3.63.** Gọi tâm của (\mathcal{C}) là $I(a; b)$ và bán kính của (\mathcal{C}) là R .

(\mathcal{C}) tiếp xúc với Ox tại $A \Rightarrow a = 2$ và $|b| = R$.

$$\begin{aligned} IB = 5 &\Leftrightarrow (6 - 2)^2 + (4 - b)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Leftrightarrow b = 1, b = 7. \end{aligned}$$

Với $a = 2, b = 1$ ta có đường tròn $(\mathcal{C}_1) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Với $a = 2, b = 7$ ta có đường tròn $(\mathcal{C}_2) : (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$.

- 3.64.** (Xem hình 3.22)

Đường tròn (\mathcal{C}) có tâm $I(1; 1)$,

bán kính $R = 1$.

Vì $M \in d$ nên $M(x; x + 3)$.

Yêu cầu của bài toán tương đương với

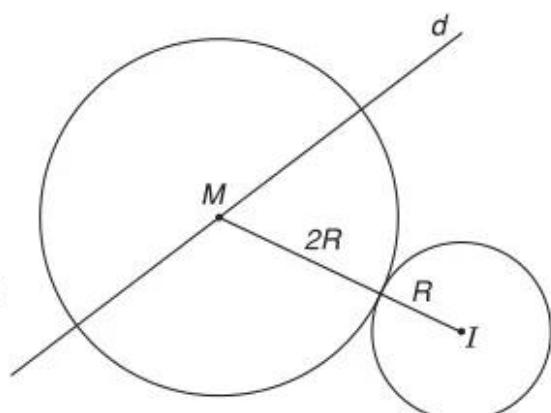
$$\begin{aligned} MI = R + 2R &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 1, x = -2. \end{aligned}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1; 4)$ và $M(-2; 1)$.

- 3.65.** (Xem hình 3.23)

Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1)$. Do đó đường thẳng Δ đi qua tâm $I(1; 2)$ và vuông góc với d có phương trình :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$



Hình 3.22

Toạ độ giao điểm H của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1).$$

Gọi J là điểm đối xứng của I qua d . Khi đó :

$$\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 3 \\ y_J = 2y_H - y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow J(3; 0).$$

Vì (\mathcal{C}') đối xứng với (\mathcal{C}) qua d nên (\mathcal{C}') có tâm là $J(3; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó (\mathcal{C}') có phương trình là : $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.

Toạ độ các giao điểm của (\mathcal{C}) và (\mathcal{C}') là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x^2 - 8x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 3, y = 2. \end{cases}$$

Vậy toạ độ giao điểm của (\mathcal{C}) và (\mathcal{C}') là $A(1; 0)$ và $B(3; 2)$.

3.66. (Xem hình 3.24)

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{5} \text{ và } IA = IB = \frac{5}{2}.$$

Do đó A, B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I và

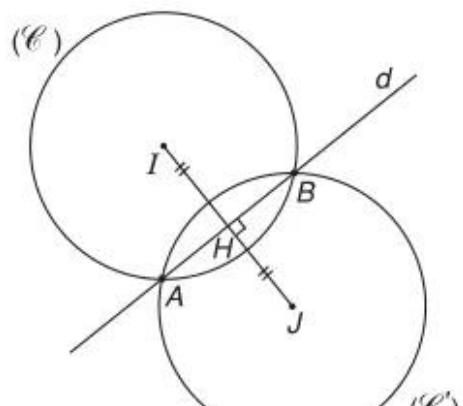
$$\text{bán kính } R = \frac{5}{2}.$$

Vậy toạ độ A, B là nghiệm của hệ :

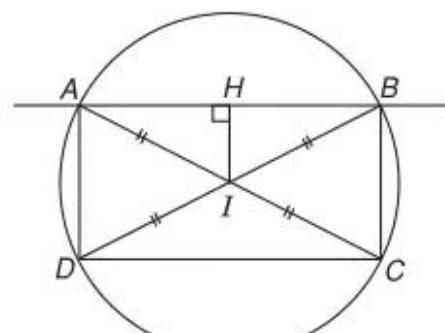
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $A(-2; 0), B(2; 2)$ (vì $x_A < 0$)

$$\Rightarrow C(3; 0), D(-1; -2).$$



Hình 3.23



Hình 3.24

3.67. (Xem hình 3.25)

Ta có : $BC \cap Ox = B(1 ; 0)$.

Đặt $x_A = a$ ta có $A(a ; 0)$ và $x_C = a \Rightarrow y_C = \sqrt{3}a - \sqrt{3}$.

Vậy $C(a ; \sqrt{3}a - \sqrt{3})$.

Từ công thức $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{cases}$ ta có $G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$.

Mà $AB = |a-1|$, $AC = \sqrt{3}|a-1|$, $BC = 2|a-1|$. Do đó :

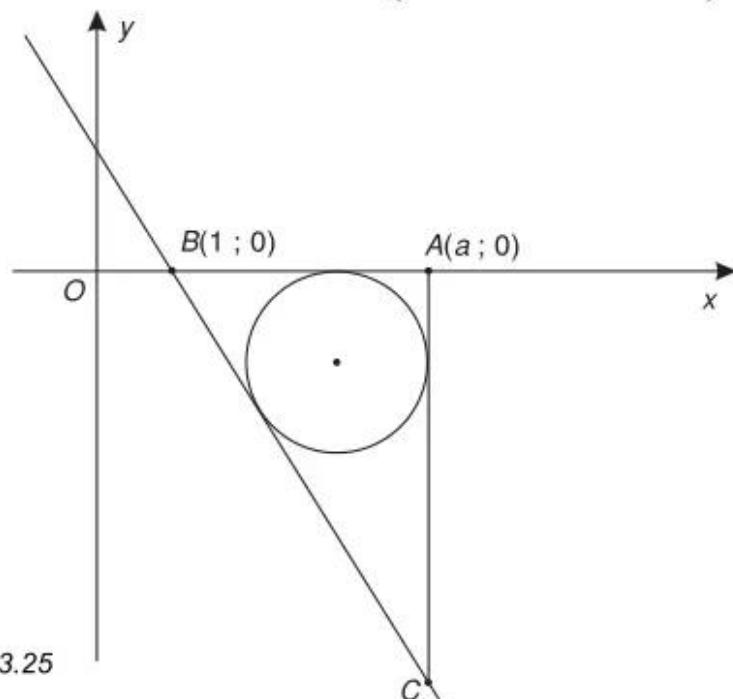
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2.$$

$$\text{Ta có } r = \frac{2S}{AB + AC + BC} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{3|a-1| + \sqrt{3}|a-1|} = \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2.$$

Vậy $|a-1| = 2\sqrt{3} + 2$.

Trường hợp 1. $a_1 = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Trường hợp 2. $a_2 = -2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$.



Hình 3.25

3.68. Giả sử $A(x_0; y_0)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x_0; -y_0)$.

Ta có : $AB^2 = 4y_0^2$ và $AC^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$.

$$\text{Vì } A \in (E) \text{ nên } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} \quad (1)$$

$$\text{Vì } AB = AC \text{ nên } (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 4y_0^2 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) và (2) và rút gọn ta được } 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Với $x_0 = 2$ thay vào (1) ta có $y_0 = 0$. Trường hợp này loại vì $A \equiv C$.

Với $x_0 = \frac{2}{7}$ thay vào (1) ta có $y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

III- ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1

Câu 1. a) $\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 126^\circ 52'$.

b) $AB : 2x + y - 1 = 0, AC : 2x - y - 3 = 0$.

c) Phân giác trong AD có phương trình : $y + 1 = 0$.

Câu 2. a) $AD \perp AB \Rightarrow$ phương trình AD có dạng $x - 2y + c = 0$.

$$d(I, AD) = d(I, AB)$$

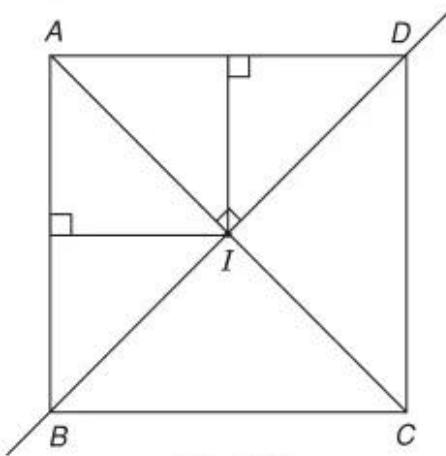
$$\Leftrightarrow \frac{|2+c|}{\sqrt{5}} = \frac{|4+1|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ c = -7 \text{ (loại do } A \text{ có hoành độ âm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình AD là : $x - 2y + 3 = 0$.

b) $A(-1; 1), BD$ vuông góc với AI tại I ,

BD có phương trình là : $3x - y - 6 = 0$.



Hình 3.26

Đề 2

Câu 1. a) Đường tròn đường kính OM có tâm $J\left(1; \frac{3}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn OM và có bán kính $R = \frac{OM}{2} = \frac{5}{4}$. Phương trình của (\mathcal{C}) là: $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

b) Đặt $A(a; 0), B(0; b)$ với $a > 0, b > 0$ ta có :

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{\frac{3}{2}}{b} = 1 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình AB là: $3x + 4y - 12 = 0$.

c) Đặt $I(c; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB , ta có: $d(I, AB) = c$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{|3c + 4c - 12|}{5} = c \left(0 < c < \frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (7c - 12)^2 = 25c^2 \Leftrightarrow 24c^2 - 168c + 144 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 6 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

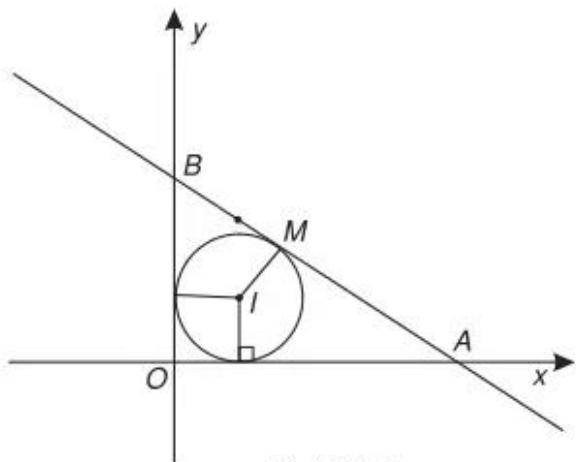
Câu 2. a) $y + 1 = 0$ hay $15x + 8y - 112 = 0$.

b) $MN = \frac{30}{\sqrt{34}}$.

Đề 3

Câu 1. a) Phương trình chính tắc của (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } 0 < b < a.$$



Hình 3.27

Ta có : $A(0 ; 2) \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b = 2.$

(E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ suy ra $c = \sqrt{5}.$

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 5 = 9$, suy ra $a = 3.$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

b) $2a = 6; 2b = 4; 2c = 2\sqrt{5}; \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

c) $S = 4ab = 24.$

Câu 2. a) (\mathcal{C}_m) có tâm $I(m; -2m)$ luôn thuộc đường thẳng $d : 2x + y = 0$ và có bán kính không đổi $R = 1.$

Vậy (\mathcal{C}_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định, đó là hai tiếp tuyến của (\mathcal{C}_m) song song với $d.$

b) $0 < |m| < \frac{2}{\sqrt{5}}.$