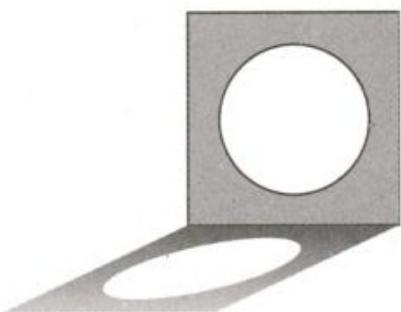


§5

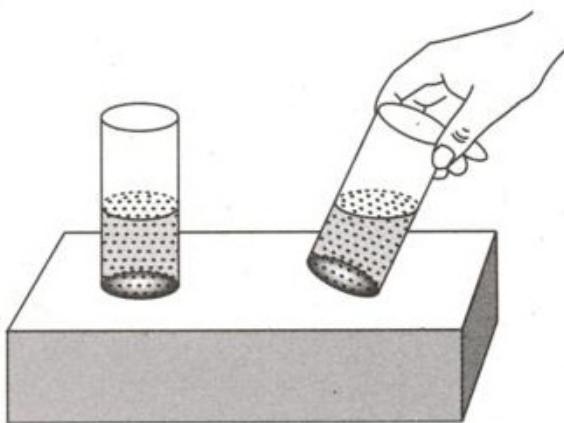
ĐƯỜNG ELIP

Đường elip là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn :

- Bóng của một đường tròn in trên mặt đất bằng phẳng dưới ánh sáng mặt trời thường là một đường elip (h. 77).



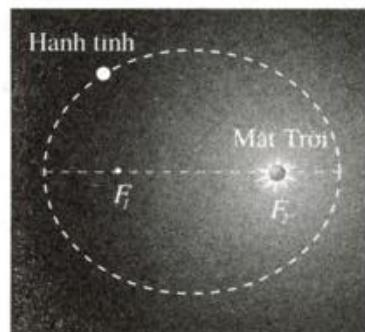
Hình 77



Hình 78

– Ta đổ một ít nước màu vào một cốc thuỷ tinh hình trụ. Nếu đặt đứng cốc nước trên mặt bàn nằm ngang thì mặt thoáng của nước trong cốc là một hình tròn, giới hạn bởi một đường tròn. Nếu ta nghiêng cốc nước đi thì mặt thoáng của nước được giới hạn bởi một đường elip (h. 78).

– Quỹ đạo của Trái Đất khi quay quanh Mặt Trời là một đường elip. Các nhà thiên văn học đã phát hiện ra rằng, trong hệ Mặt Trời, mỗi hành tinh đều chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip (h. 79).



Hình 79

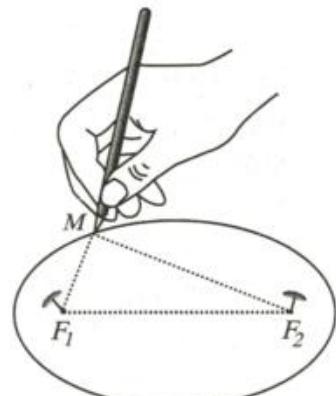
1. Định nghĩa đường elip



1 (Vẽ đường elip)

Em hãy đóng lén mặt một bảng gỗ hai chiếc đinh tại hai điểm F_1 và F_2 (h. 80).

Lấy một vòng dây kín không đàn hồi, có độ dài lớn hơn hai lần khoảng cách F_1F_2 . Quàng sợi dây vào hai chiếc đinh, đặt đầu bút chì vào trong vòng dây rồi căng ra để vòng dây trở thành một tam giác. Hãy di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn luôn căng và áp sát mặt gỗ. Khi đó đầu bút chì sẽ vạch ra một đường mà ta gọi là đường elip.



Hình 80

[?1] Trong cách vẽ đường elip ở trên, gọi vị trí đầu bút chì là M . Khi M thay đổi, có nhận xét gì về chu vi tam giác MF_1F_2 , và vẽ tổng $MF_1 + MF_2$?

ĐỊNH NGHĨA

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 , với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

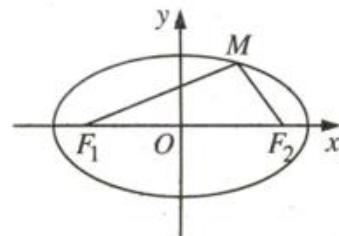
Đường elip (còn gọi là **elip**) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là **các tiêu điểm** của elip. Khoảng cách $2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip

Cho elip (E) như trong định nghĩa trên. Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2 . Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (h. 81).

[?2] Với cách chọn hệ trục tọa độ như vậy, hãy cho biết tọa độ của hai tiêu điểm F_1 và F_2 .



Hình 81



Giả sử điểm $M(x ; y)$ nằm trên elip (E). Hãy tính $MF_1^2 - MF_2^2$ rồi sử dụng định nghĩa $MF_1 + MF_2 = 2a$ để tính $MF_1 - MF_2$. Từ đó suy ra

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là **bán kính qua tiêu** của điểm M .

Bây giờ ta lập phương trình của elip (E) đối với hệ trục tọa độ đã chọn như trên.

Ta có

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ hay } \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2.$$

Rút gọn đẳng thức trên ta được $\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$, hay

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Vì $a^2 - c^2 > 0$ nên ta có thể đặt $a^2 - c^2 = b^2$ (với $b > 0$) và được

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).} \quad (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng : Nếu điểm M có tọa độ $(x ; y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$, do đó $MF_1 + MF_2 = 2a$, tức là M thuộc elip (E).

Phương trình (1) gọi là **phương trình chính tắc** của elip đã cho.

Ví dụ 1. Cho ba điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$ và $I(0; 3)$.

a) Hãy viết phương trình chính tắc của elip có tiêu điểm là F_1, F_2 và đi qua I .

b) Khi M chạy trên elip đó, khoảng cách MF_1 có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Giải

a) Elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Điểm $I(0; 3)$ nằm trên elip

đã cho nên $\frac{0}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, suy ra $b^2 = 9$. Theo giả thiết, tiêu cự của elip đó là $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5}$. Vậy $c = \sqrt{5}$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 5 = 14$.

Vậy elip cần tìm có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Theo công thức về độ dài bán kính qua tiêu, ta có $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$. Vì

$-a \leq x \leq a$ nên $a - \frac{ca}{a} \leq MF_1 \leq a + \frac{ca}{a}$ hay $a - c \leq MF_1 \leq a + c$. Do đó MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ khi $x = -a$ và có giá trị lớn nhất là $a + c = \sqrt{14} + \sqrt{5}$ khi $x = a$.

Ví dụ 2. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $M(0; 1)$ và $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Xác định tọa độ các tiêu điểm của elip đó.

Giải. Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

Elip đi qua $M(0; 1)$ nên $\frac{1}{b^2} = 1$ hay $b^2 = 1$. Elip đó đi qua $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

nên $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, suy ra $a^2 = 4$. Vậy elip cần tìm có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Vậy toạ độ các tiêu điểm của elip đó là $F_1 = (-\sqrt{3}; 0)$ và $F_2 = (\sqrt{3}; 0)$.

3. Hình dạng của elip

a) Tính đối xứng của elip

[?3] Cho elip có phương trình (1) và một điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên elip. Hỏi các điểm sau đây có nằm trên elip không?

$$M_1(-x_0; y_0), M_2(x_0; -y_0), M_3(-x_0; -y_0).$$

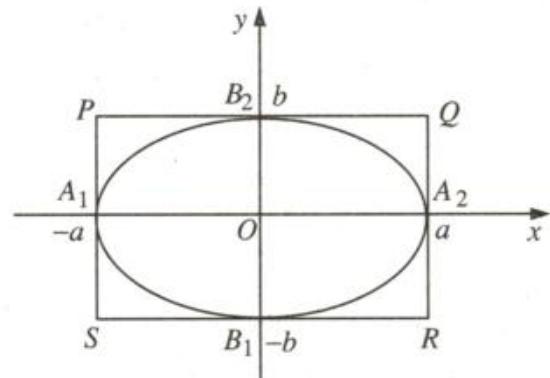
Từ đó suy ra

Elip có phương trình (1) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

b) Hình chữ nhật cơ sở

Elip với phương trình chính tắc (1), cắt trục Ox tại hai điểm A_1 và A_2 , cắt trục Oy tại hai điểm B_1 và B_2 . Bốn điểm đó gọi là các **đỉnh** của elip. Trục Ox được gọi là **trục lớn**, trục Oy được gọi là **trục bé** (hay trục nhỏ). Người ta cũng gọi đoạn A_1A_2 là trục lớn, đoạn B_1B_2 là trục bé. Độ dài trục lớn là $2a$, độ dài trục bé là $2b$.

Vẽ qua A_1 và A_2 hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua B_1 và B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là **hình chữ nhật cơ sở** của elip (h. 82).



Hình 82

[?4] Nếu xét điểm $M(x; y)$ nằm trên elip có phương trình chính tắc (1) thì giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x là bao nhiêu? Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của y là bao nhiêu?

Từ đó suy ra

Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó. Bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

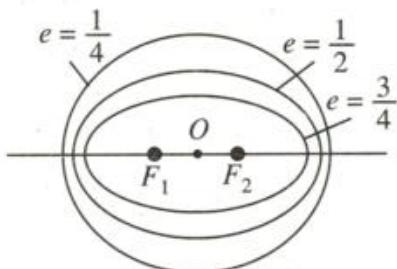
c) Tâm sai của elip

|| Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là **tâm sai** của elip và được kí hiệu là e , tức là $e = \frac{c}{a}$. ||

Rõ ràng là $0 < e < 1$. Hơn nữa, do $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ nên

– Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng "béo" ;

– Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\frac{b}{a}$ càng gần tới 0 và hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó đường elip càng "gây" (h. 83).



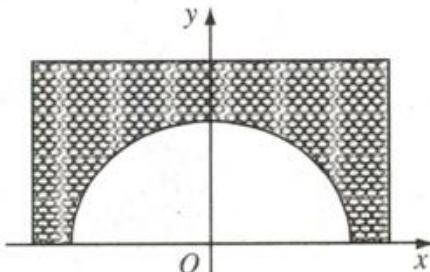
Hình 83

Ví dụ 3. Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là 20 m, mặt cắt đứng của đường hầm có dạng nửa elip như hình 84. Biết rằng tâm sai của đường elip là $e \approx 0,5$. Hãy tìm chiều cao của đường hầm đó.

Giải. Gọi chiều cao của đường hầm là b .
Nửa trục lớn của elip là $a = 10$ m. Elip có nửa tiêu cự là $c = a.e \approx 5$ (m).

Chiều cao của hầm là

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx \sqrt{100 - 25} \approx 8,7 \text{ (m).}$$



Hình 84

d) Elip và phép co đường tròn

Bài toán. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = a^2$ và một số k ($0 < k < 1$). Với mỗi điểm $M(x; y)$ trên (C) , lấy điểm $M'(x'; y')$ sao cho $x' = x$ và $y' = ky$. Tìm tập hợp các điểm M' .

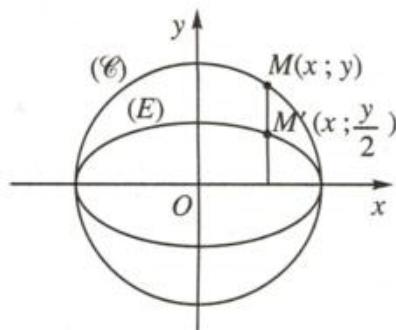
Giải. Từ $x' = x$, $y' = ky$ suy ra $x = x'$, $y = \frac{y'}{k}$. Điểm M thuộc đường tròn (C) khi và chỉ khi $x^2 + y^2 = a^2$, tức là

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} = 1.$$

Đặt $b = ka$, ta được tập hợp các điểm M' là elip (E) có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Người ta nói : Phép co về trục hoành theo hệ số k biến đường tròn (C) thành elip (E) .



Hình 85. Phép co về trục hoành theo hệ số $k = \frac{1}{2}$ biến đường tròn (C) thành elip (E) .

Em có biết ?



Nhà thiên văn học người Đức Kê-ple (J. Kepler) đã chứng minh rằng : Mỗi hành tinh trong hệ Mặt Trời đều chuyển động theo quỹ đạo là một đường elip mà tâm Mặt Trời là một tiêu điểm.



Johannes Kepler
(1571 – 1630)

Tâm sai của các quỹ đạo của 8 hành tinh đã quen thuộc trong hệ Mặt Trời như sau :

Sao Kim : $e \approx 0,0068$ Trái Đất : $e \approx 0,0167$

Sao Mộc : $e \approx 0,0484$ Sao Hải Vương : $e \approx 0,0082$

Sao Thuỷ : $e \approx 0,2056$ Sao Thiên Vương : $e \approx 0,0460$

Sao Thổ : $e \approx 0,0543$

Sao Hoả : $e \approx 0,0934$.

Trong các hành tinh trên thì Sao Kim, Trái Đất và Sao Hải Vương có quỹ đạo gần giống đường tròn hơn.

Ngoài ra, chúng ta cũng biết rằng Mặt Trăng quay quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Tâm sai của quỹ đạo này là $e \approx 0,0549$.

Câu hỏi và bài tập

30. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- a) Tiêu cự của (E) là $2c$, trong đó $c^2 = a^2 - b^2$.
- b) (E) có độ dài trục lớn bằng $2a$, độ dài trục bé bằng $2b$.
- c) (E) có tâm sai $e = -\frac{c}{a}$.
- d) Toạ độ các tiêu điểm của (E) là $F_1 = (-c ; 0)$, $F_2 = (c ; 0)$.
- e) Điểm $(b ; 0)$ là một đỉnh của (E).

31. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé của mỗi elip có phương trình sau

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; c) $x^2 + 4y^2 = 4$.

32. Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau

- a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4;
- c) (E) có một tiêu điểm là $F(\sqrt{3} ; 0)$ và đi qua điểm $M\left(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

33. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu (đoạn thẳng nối hai điểm của elip gọi là *dây cung* của elip, trục chứa các tiêu điểm gọi là *trục tiêu* của elip).

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$, trong đó F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

34. Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm của Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm $\approx 1,609$ km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.

35. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm A chạy trên trục Ox , điểm B chạy trên trục Oy nhưng độ dài đoạn AB bằng a không đổi. Tìm tập hợp các điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MB = 2MA$.