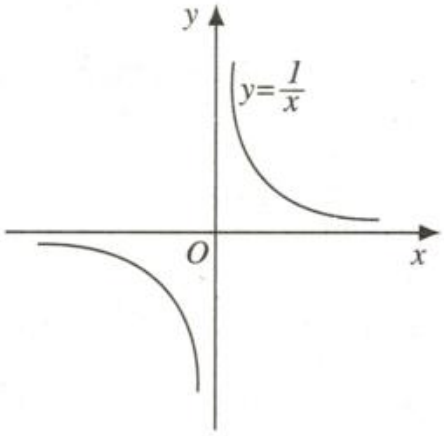
§6 ĐƯỜNG HYPEBOL

Đường hypebol cũng là một đường quen thuộc đối với chúng ta, chẳng hạn

– Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là một đường hypebol (h. 86a) ;

– Quan sát vùng sáng hắt lên bức tường từ một đèn bàn ; vùng sáng này có hai mảng, mỗi mảng được giới hạn bởi một phần của một đường hypepol (h. 86b).



a)

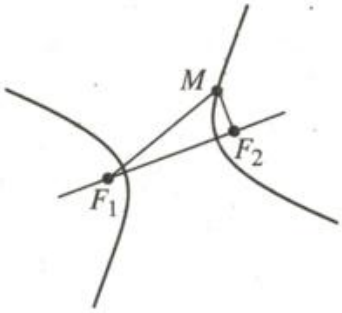
b)

Hình 86

1. Định nghĩa đường hypepol

ĐỊNH NGHĨA

*Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$). **Đường hypebol** (còn gọi là **hypebol**) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c* (h. 87).

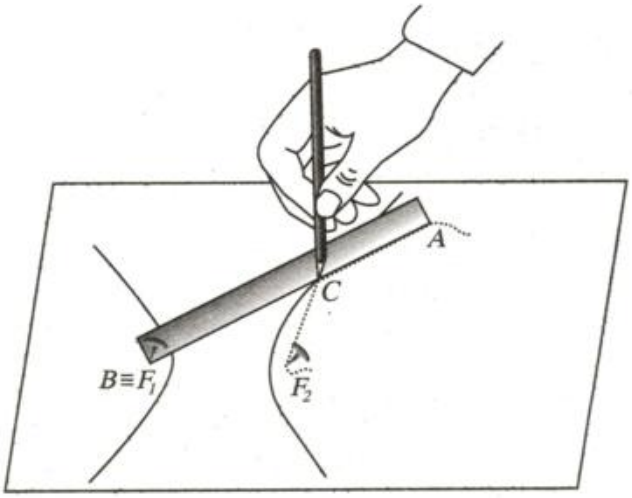


Hình 87

*Hai điểm F_1, F_2 gọi là các **tiêu điểm** của hypebol. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là **tiêu cự** của hypebol.*

Có thể vẽ hypebol như sau (h. 88) : Lấy một thước thẳng có mép AB và một sợi dây không đàn hồi có chiều dài l nhỏ hơn chiều dài AB của thước và $l > AB - F_1F_2$. Đóng hai chiếc đinh lên mặt một bảng gỗ tại F_1, F_2. Đính một đầu dây vào điểm A và đầu dây kia vào F_2. Đặt thước sao cho điểm B trùng với F_1 và lấy đầu bút chì tì sát sợi dây vào thước thẳng sao cho sợi dây luôn bị căng rồi cho thước quay quanh F_1, mép thước luôn áp sát mặt gỗ. Khi đó, đầu bút chì C sẽ vạch nên một đường cong. Ta sẽ chứng tỏ đường cong đó là một phần của đường hypebol. Thật vậy, ta có

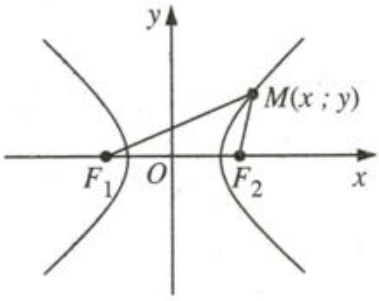
$$CF_1 - CF_2 = (CF_1 + CA) - (CF_2 + CA) = AB - l \text{ không đổi.}$$



Hình 88

2. Phương trình chính tắc của hypebol

Cho hypebol (H) như trong định nghĩa trên. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox. Khi đó $F_1 = (-c\ ;\ 0)$, $F_2 = (c\ ;\ 0)$ (h. 89).



Hình 89

1

Giả sử điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên hypebol (H). Hãy tính biểu thức $MF_1^2 - MF_2^2$ và sử dụng giả thiết $|MF_1 - MF_2| = 2a$ để suy ra

$$MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \text{ và } MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|.$$

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là ***bán kính qua tiêu*** của điểm M.

Bây giờ ta sẽ lập phương trình của hypebol (H) đối với hệ toạ độ đã chọn. Ta có

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \text{ hay } (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2.$$

Rút gọn đẳng thức trên ta được $\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ hay $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Chú ý rằng $a^2 - c^2 < 0$ nên ta có thể đặt $a^2 - c^2 = -b^2$ hay $b^2 = c^2 - a^2$ (với $b > 0$), và ta được

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0).} \qquad (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng : Nếu điểm M có toạ độ $(x ; y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right|$, $MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|$ và do đó $|MF_1 - MF_2| = 2a$, tức là M thuộc hypebol (H).

Phương trình (1) được gọi là ***phương trình chính tắc*** của hypebol.

3. Hình dạng của hypebol

2

Từ phương trình chính tắc (1) của hypebol, hãy giải thích vì sao nó có các tính chất sau

a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng của hypebol. Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol.

b) Hypebol cắt trục Ox tại hai điểm và không cắt trục Oy.

Ngoài ra, đối với hypebol có phương trình chính tắc (1), ta còn có các khái niệm sau đây

• Trục Ox (chứa hai tiêu điểm) gọi là ***trục thực***, trục Oy gọi là ***trục ảo*** của hypebol. Hai giao điểm của hypebol với trục Ox gọi là ***hai đỉnh*** của hypebol. Người ta cũng gọi đoạn thẳng nối hai đỉnh của hypebol là trục thực. Khoảng cách $2a$ giữa hai đỉnh gọi là ***độ dài trục thực***, $2b$ gọi là ***độ dài trục ảo***.

• Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là một ***nhánh*** của hypebol.

• Ta cũng gọi, giống như với elip, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực là ***tâm sai*** của hypebol, kí hiệu là e, tức là $\frac{c}{a} = e$. Chú ý rằng ta luôn có $e > 1$.

Ví dụ. *Cho hypebol* (H) :

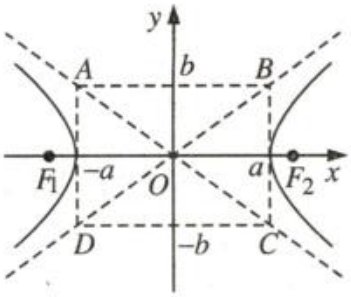
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Xác định toạ độ các đỉnh, các tiêu điểm và tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo của (H).

Giải. Hypebol (H) có $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ nên $a = 3$, $b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 13$, $c = \sqrt{13}$. Vậy hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1 = (-\sqrt{13}\ ; 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}\ ; 0)$; các đỉnh $A_1 = (-3\ ;\ 0)$, $A_2 = (3\ ;\ 0)$; tâm sai $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; độ dài trục thực $2a = 6$; độ dài trục ảo $2b = 4$.

• Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là ***hình chữ nhật cơ sở*** của hypebol có phương trình (1) (h. 90). Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai ***đường tiệm cận*** của hypebol. Phương trình hai đường tiệm cận đó là

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$



Hình 90

3

Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$. Lấy điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ trên (H) với $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Chứng tỏ rằng khoảng cách từ M đến đường tiệm cận $y = \frac{x}{2}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{5}(x_0 + 2y_0)}$.

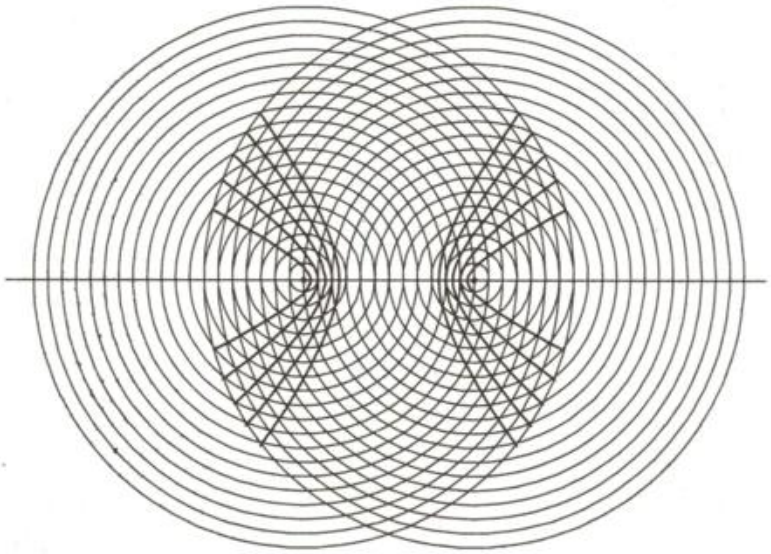
Nhận xét gì về khoảng cách đó khi x_0 tăng dần ?

Như vậy, khi điểm M trên hypebol càng xa gốc toạ độ thì khoảng cách từ điểm đó đến một trong hai đường tiệm cận càng nhỏ đi, điều đó cũng có nghĩa là điểm M ngày càng gần sát đường tiệm cận đó (điều này giải thích ý nghĩa của từ "tiệm cận").

Em có biết ?

Hai đường tròn không đồng tâm $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ có điểm chung M thì hiển nhiên $|MO - MO'| = |R - R'|$, nên khi giữ O, O' cố định và cho R, R' thay đổi sao cho $|R - R'| = 2a$ không đổi $(a > 0)$ thì các giao điểm M cùng nằm trên một hypebol với tiêu điểm là O và O'.

Hình 91 minh hoạ những hypebol như thế với các giá trị khác nhau của a.



Hình 91

Câu hỏi và bài tập

36. Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Tiêu cự của (H) là $2c$, trong đó $c^2 = a^2 + b^2$.

b) (H) có độ dài trục thực bằng $2a$, độ dài trục ảo bằng $2b$.

c) Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là $y = \pm\frac{a}{b}x$.

d) Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} > 1$.

37. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh ; độ dài trục thực, trục ảo và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; c) $x^2 - 9y^2 = 9$.

38. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm F_1, bán kính R và một điểm F_2 ở ngoài $(\mathscr{C})$. Chứng minh rằng tập hợp tâm các đường tròn đi qua F_2, tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ là một đường hypebol. Viết phương trình chính tắc của hypebol đó.

39. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau

a) (H) có một tiêu điểm là $(5 ; 0)$ và độ dài trục thực bằng 8 ;

b) (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$;

c) (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$ và đi qua điểm $\left(\sqrt{10}; 6\right)$.

40. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc hypebol đến hai đường tiệm cận của nó là một số không đổi.

41. Trong mặt phẳng toạ độ cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và $F_2(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Chứng minh rằng với mỗi điểm $M(x ; y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, ta đều có

$$MF_1^2 = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 ; \quad MF_2^2 = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 .$$

Từ đó suy ra $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$.