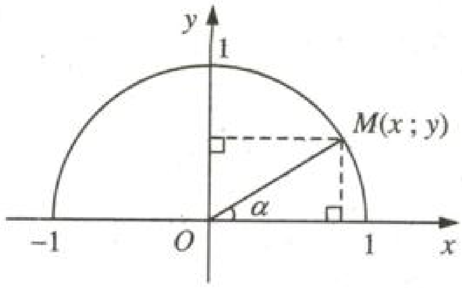
§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (từ 0° đến 180°)

Ở lớp 9, các em đã biết về các giá trị lượng giác (tỉ số lượng giác) : sin, côsin, tang, côtang của một góc nhọn α và kí hiệu là $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Trên hình 32 có một hệ toạ độ Oxy và một nửa đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, nằm phía trên trục Ox. Ta gọi nó là ***nửa đường tròn đơn vị***.



Hình 32

Nếu cho trước một góc nhọn α thì ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$.

1

Giả sử $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M (h. 32). Hãy chứng tỏ rằng

$$\sin\alpha = y \ ; \ \cos\alpha = x \ ; \ \tan\alpha = \frac{y}{x} \ ; \ \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

Bây giờ chúng ta mở rộng định nghĩa giá trị lượng giác cho góc α bất kì $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$. Ta làm điều đó bằng cách vẫn dùng nửa đường tròn đơn vị như trên.

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$, ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x ; y)$. Khi đó

Tung độ y của điểm M gọi là ***sin*** *của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$;*

Hoành độ x của điểm M gọi là ***côsin*** *của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$;*

Tỉ số $\frac{y}{x}$ (với $x \neq 0$) gọi là **tang** *của góc α, kí hiệu là* $\tan\alpha$;

Tỉ số $\frac{x}{y}$ (với $y \neq 0$) gọi là **côtang** *của góc α, kí hiệu là* $\cot\alpha$.

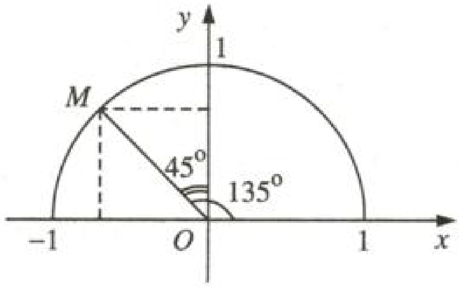
Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ gọi là các ***giá trị lượng giác*** của góc α.

Như vậy $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Ví dụ 1. *Tìm các giá trị lượng giác của góc* 135^o.

Giải. (h. 33) Ta lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = 135^o$. Khi đó hiển nhiên $\widehat{MOy} = 45^o$. Từ đó suy ra toạ độ của điểm M là

$$M = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



Hình 33

Vậy $\sin 135^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135^o = -1$; $\cot 135^o = -1$.

?1 *Tìm các giá trị lượng giác của các góc* 0^o, 180^o, 90^o.

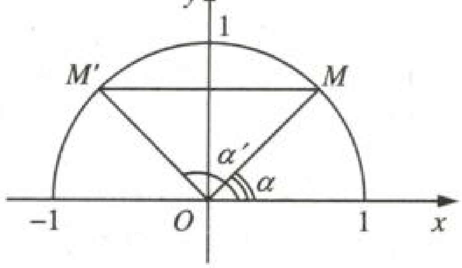
?2 *Với các góc α nào thì* $\sin\alpha < 0$ *? Với các góc α nào thì* $\cos\alpha < 0$ *?*

2 (h. 34)

Lấy hai điểm M và M' trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $MM' \parallel Ox$.

a) Tìm sự liên hệ giữa hai góc $\alpha = \widehat{MOx}$ và $\alpha' = \widehat{M'Ox}$.

b) Hãy so sánh các giá trị lượng giác của hai góc α và α'.



Hình 34

Từ đó ta suy ra các tính chất sau đây

Nếu hai góc bù nhau thì sin của chúng bằng nhau, còn côsin, tang và côtang của chúng đối nhau ; nghĩa là

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha \ ;$$

$$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha \ ;$$

$$\tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha \qquad (\alpha \neq 90^o) \ ;$$

$$\cot(180^o - \alpha) = -\cot\alpha \qquad (0^o < \alpha < 180^o).$$

Ví dụ 2. *Tìm các giá trị lượng giác của góc* 150^o.

Giải. Góc 150^o bù với góc 30^o nên

$$\sin 150^o = \sin 30^o = \frac{1}{2} \ ; \qquad \cos 150^o = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

$$\tan 150^o = -\tan 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ ; \qquad \cot 150^o = -\cot 30^o = -\sqrt{3}.$$

2. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Sau đây là giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà ta nên nhớ (trong bảng dưới đây, kxđ là viết tắt của nhóm từ *không xác định*). Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tìm thấy trong bảng số hoặc bằng máy tính bỏ túi.

Góc	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

Em có biết ?

CÁC TỪ SIN, CÔSIN, TANG, CÔTANG

Từ xa xưa, do nhu cầu đo đạc thiên văn, nhiều nhà toán học đã lập bảng độ dài dây cung căng bởi cung tròn (bán kính cho trước) có số đo 1^o, 2^o, 3^o, ..., 180^o, trong đó có Hip-pac (Hipparque) ở thế kỉ thứ II trước công nguyên, Ptô-lê-mê (Ptolemey) ở thế kỉ thứ II sau công nguyên, v.v... Đó là nguồn gốc của khái niệm sin. Qua nhiều giai đoạn lịch sử, từ "jiva" (tiếng Ấn, có nghĩa là "dây cung") được diễn dịch, phiên âm, đổi dần thành từ sinus bởi các nhà thiên văn, toán học như An Bat-ta-ni (Al Battani) ở thế kỉ thứ X, Giê-ra Crê-môn (Gérard Crémone) ở thế kỉ thứ XII, v.v...

Khái niệm tang, côtang nảy sinh từ việc khảo sát bóng của vật thẳng đứng trên nền nằm ngang để tìm giờ trong ngày. Từ xa xưa, người ta cũng đã lập bảng các "bóng" (tức bảng tang, côtang).

Đến thế kỉ thứ XVI mới xuất hiện kí hiệu sin, tang (Tô-mat Phin (Thomas Finck)) và đầu thế kỉ thứ XVII mới xuất hiện kí hiệu côsin, côtang để chỉ sin, tang của góc phụ (Et-mơn Gơn-tơ (Edmund Gunter)). Các kí hiệu này dần dần được chấp nhận và sử dụng phổ cập.

Câu hỏi và bài tập

1. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số)

a) $(2\sin 30^o + \cos 135^o - 3\tan 150^o)(\cos 180^o - \cot 60^o)$;

b) $\sin^2 90^o + \cos^2 120^o + \cos^2 0^o - \tan^2 60^o + \cot^2 135^o$.

2. Đơn giản các biểu thức

a) $\sin 100^o + \sin 80^o + \cos 16^o + \cos 164^o$;

b) $2\sin(180^o - \alpha)\cot\alpha - \cos(180^o - \alpha)\tan\alpha\cot(180^o - \alpha)$ với $0^o < \alpha < 90^o$.

3. Chứng minh các hệ thức sau

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$;

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^o < \alpha < 180^o)$.