

§3

KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Bài toán 1. Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$. Hãy tính khoảng cách $d(M ; \Delta)$ từ điểm $M(x_M ; y_M)$ đến Δ .

Giải. (h. 72) Gọi M' là hình chiếu của M trên Δ thì độ dài đoạn $M'M$ chính là khoảng cách từ M đến Δ .

Hiển nhiên $\overrightarrow{M'M}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a ; b)$ của Δ , vậy có số k sao cho

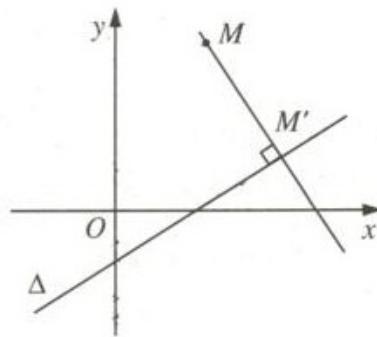
$$\overrightarrow{M'M} = k\vec{n}. \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$d(M ; \Delta) = M'M = |k| \cdot |\vec{n}| = |k| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Mặt khác, nếu gọi $(x' ; y')$ là tọa độ của M' thì từ (1) ta có

$$\begin{cases} x_M - x' = ka \\ y_M - y' = kb \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x' = x_M - ka \\ y' = y_M - kb. \end{cases}$$



Hình 72

Vì M' nằm trên Δ nên $a(x_M - ka) + b(y_M - kb) + c = 0$. Từ đó suy ra $k = \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}$. Thay giá trị của k vào (2) ta được

$$d(M ; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

a) $M(13 ; 14)$ và $\Delta : 4x - 3y + 15 = 0$;

b) $M(5 ; -1)$ và $\Delta : \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t. \end{cases}$

Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_M ; y_M)$. Nếu M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ thì theo lời giải của Bài toán 1, ta có

$$\overrightarrow{M'M} = k \vec{n}, \text{ trong đó } k = \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}.$$

Tương tự nếu có điểm $N(x_N ; y_N)$ với N' là hình chiếu của N trên Δ thì ta cũng có

$$\overrightarrow{N'N} = k' \vec{n}, \text{ trong đó } k' = \frac{ax_N + by_N + c}{a^2 + b^2}.$$

? Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M, N đối với Δ khi k và k' cùng dấu ? Khi k và k' khác dấu ?

Ta có kết quả sau

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M ; y_M)$, $N(x_N ; y_N)$ không nằm trên Δ . Khi đó

Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0 ; .$$

Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0 .$$



2

Cho tam giác ABC có các đỉnh là $A = (1 ; 0)$, $B = (2 ; -3)$, $C = (-2 ; 4)$ và đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$. Xét xem Δ cắt cạnh nào của tam giác.

Ta có thể áp dụng công thức tính khoảng cách để viết phương trình các đường phân giác.

Bài toán 2. Cho hai đường thẳng cắt nhau, có phương trình

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

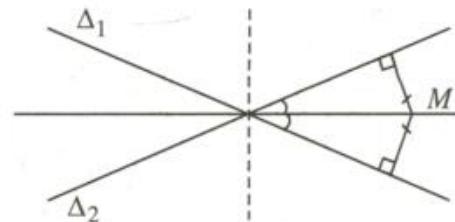
Chứng minh rằng phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó có dạng

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$



3

Hãy giải Bài toán 2, với chú ý rằng điểm M thuộc một trong hai đường phân giác khi và chỉ khi nó cách đều hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (h. 73).



Hình 73

Ví dụ. Cho tam giác ABC với

$$A = \left(\frac{7}{4} ; 3 \right), B = (1 ; 2), C = (-4 ; 3).$$

Viết phương trình đường phân giác trong của góc A .

Giải. Để thấy các đường thẳng AB và AC có phương trình

$$AB : 4x - 3y + 2 = 0 \quad \text{và} \quad AC : y - 3 = 0.$$

Các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A có phương trình

$$\frac{4x - 3y + 2}{5} + \frac{y - 3}{1} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{4x - 3y + 2}{5} - \frac{y - 3}{1} = 0;$$

hay : $4x + 2y - 13 = 0$ (đường phân giác d_1)

$$4x - 8y + 17 = 0 \quad (\text{đường phân giác } d_2).$$

Do hai điểm B, C nằm cùng phía đối với đường phân giác ngoài và nằm khác phía đối với đường phân giác trong của góc A nên ta chỉ cần xét vị trí

của B, C đối với một trong hai đường, chẳng hạn d_2 . Thay toạ độ của B, C lần lượt vào vế trái của d_2 ta được

$$4 - 16 + 17 = 5 > 0 \text{ và } -16 - 24 + 17 = -23 < 0,$$

tức là B, C nằm khác phía đối với d_2 .

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là

$$d_2 : 4x - 8y + 17 = 0.$$

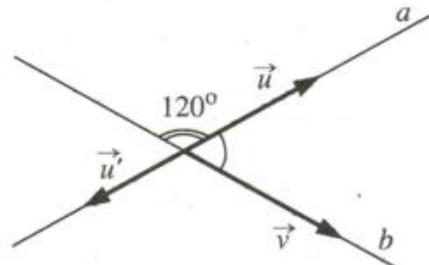
2. Góc giữa hai đường thẳng

ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b , hay đơn giản là góc giữa a và b .

Khi a song song hoặc trùng với b , ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° .

- [?2]** Trên hình 74, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng bao nhiêu? Hãy so sánh góc đó với góc giữa hai vectơ \vec{u} , \vec{v} và góc giữa hai vectơ \vec{u}' , \vec{v} .



CHÚ Ý

Hình 74

Góc giữa hai đường thẳng a và b được kí hiệu là $\widehat{(a, b)}$, hay đơn giản là (a, b) . Góc này không vượt quá 90° nên ta có

$$(a, b) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^\circ,$$

$$(a, b) = 180^\circ - (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}, \vec{v}) > 90^\circ,$$

trong đó \vec{u}, \vec{v} lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b .



Cho biết phương trình của hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 3t' \end{cases}$$

Tìm toạ độ vectơ chỉ phương của hai đường thẳng và tìm góc hợp bởi hai đường thẳng đó.

Bài toán 3

a) Tìm côsin của góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt cho bởi các phương trình

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

b) Tìm điều kiện để hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

c) Tìm điều kiện để hai đường thẳng $y = kx + b$ và $y = k'x + b'$ vuông góc với nhau.



5 (Để giải Bài toán 3)

Viết tọa độ hai vectơ chỉ phương \vec{u}_1 của Δ_1 và \vec{u}_2 của Δ_2 .

Hãy chứng tỏ rằng $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$. Từ đó đi đến các kết quả sau đây

a) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$, trong đó \vec{n}_1, \vec{n}_2 lần lượt là

vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 .

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

c) Áp dụng câu b) hãy chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $y = kx + b$ và $y = k'x + b'$ vuông góc là $kk' = -1$.



6

Tìm góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 13 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ $\Delta_2 : \begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = 7 + t' \end{cases}$

b) $\Delta_1 : x = 5$; $\Delta_2 : 2x + y - 14 = 0$;

c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ $\Delta_2 : 2x + 3y - 1 = 0$.

Câu hỏi và bài tập

15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Côsin của góc giữa hai đường thẳng a và b bằng côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng.

b) Nếu hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình $px + y + m = 0$ và $x + py + n = 0$ thì

$$\cos(\Delta, \Delta') = \frac{2|p|}{p^2 + 1}.$$

c) Trong tam giác ABC ta có

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

d) Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC thì

$$\cos \varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$

e) Hai điểm $(7 ; 6)$ và $(-1 ; 2)$ nằm về hai phía của đường thẳng $y = x$.

16. Cho ba điểm $A(4 ; -1), B(-3 ; 2), C(1 ; 6)$. Tính góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC .
17. Viết phương trình đường thẳng song song và cách đường thẳng $ax + by + c = 0$ một khoảng bằng h cho trước.
18. Cho ba điểm $A(3 ; 0), B(-5 ; 4)$ và $P(10 ; 2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B .
19. Cho điểm $M(2 ; 3)$. Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục tọa độ ở A và B sao cho ABM là tam giác vuông cân tại đỉnh M .
20. Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : x + 2y - 3 = 0,$$

$$\Delta_2 : 3x - y + 2 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $P(3 ; 1)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB .