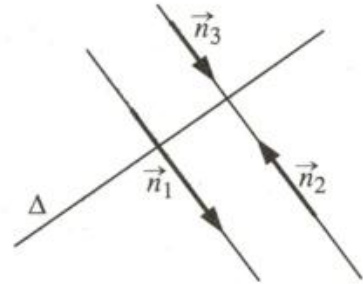


§1

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trên hình 65, ta có các vectơ $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ khác $\vec{0}$ mà giá của chúng đều vuông góc với đường thẳng Δ . Khi đó, ta gọi $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ là những vectơ pháp tuyến của Δ .



Hình 65

ĐỊNH NGHĨA

|| Vectơ \vec{n} khác $\vec{0}$, có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

- [?1]** Mỗi đường thẳng có bao nhiêu vectơ pháp tuyến? Chúng liên hệ với nhau như thế nào?
- [?2]** Cho điểm I và vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua I và nhận \vec{n} là vectơ pháp tuyến?

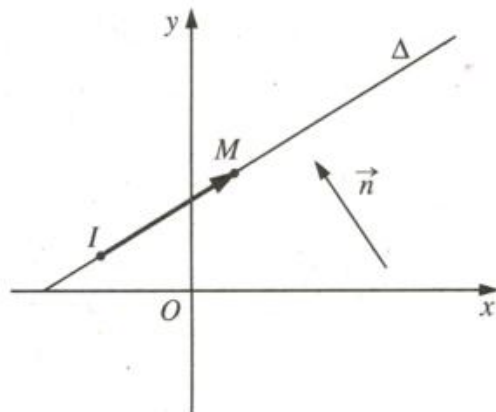
Bài toán

Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm $I(x_0; y_0)$ và vectơ $\vec{n}(a; b) \neq \vec{0}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua I , có vectơ pháp tuyến là \vec{n} . Tìm điều kiện của x và y để điểm $M(x; y)$ nằm trên Δ .

Giải. (h. 66)

Điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi $\vec{IM} \perp \vec{n}$, hay

$$\vec{IM} \cdot \vec{n} = 0. \quad (*)$$



Hình 66

Ta có $\overline{IM} = (x - x_0; y - y_0)$ và $\vec{n} = (a; b)$ nên (*) tương đương với

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (1)$$

Đây chính là điều kiện cần và đủ để $M(x; y)$ nằm trên Δ .

Biến đổi (1) về dạng $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ và đặt $-ax_0 - by_0 = c$, ta được phương trình

$$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

và gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng Δ .

Tóm lại,

Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng

$$ax + by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Ngược lại, ta có thể chứng minh được rằng : Mỗi phương trình dạng

$$ax + by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng xác định, nhận $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến.

?3 Mọi phương trình sau có phải là phương trình tổng quát của đường thẳng không? Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó :

$$7x - 5 = 0; \quad mx + (m + 1)y - 3 = 0; \quad kx - \sqrt{2}ky + 1 = 0.$$



1 Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $3x - 2y + 1 = 0$.

- a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .
- b) Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc Δ , điểm nào không thuộc Δ ?

$$M(1; 1), \quad N(-1; -1), \quad P\left(0; \frac{1}{2}\right), \quad Q(2; 3), \quad E\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

Ví dụ. Cho tam giác có ba đỉnh $A = (-1; -1)$, $B = (-1; 3)$, $C = (2; -4)$.
Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A .

Giải. Đường cao cần tìm là đường thẳng đi qua A và nhận \overline{BC} là một vectơ pháp tuyến. Ta có $\overline{BC} = (3; -7)$ và $A = (-1; -1)$ nên theo (1), phương trình tổng quát của đường cao đó là $3(x + 1) - 7(y + 1) = 0$ hay $3x - 7y - 4 = 0$.

Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát



2

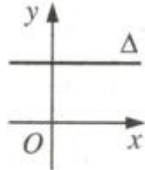
Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Em có nhận xét gì về vị trí tương đối của Δ và các trục toạ độ khi $a = 0$? Khi $b = 0$? Khi $c = 0$?

GHI NHỚ

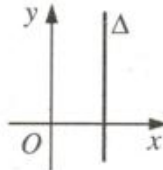
Đường thẳng $by + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Ox (h. 67a).

Đường thẳng $ax + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Oy (h. 67b).

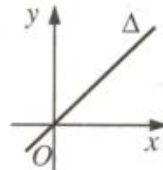
Đường thẳng $ax + by = 0$ đi qua gốc toạ độ (h. 67c).



a)



b)



c)

Hình 67



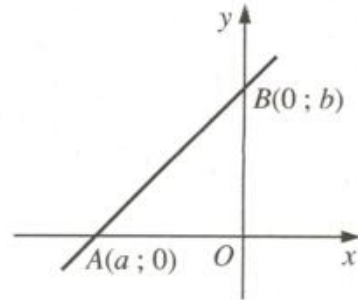
3

Cho hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$, với $ab \neq 0$ (h. 68).

a) Hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A và B .

b) Chứng tỏ rằng phương trình tổng quát của Δ tương đương với phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Hình 68

GHI NHỚ

Đường thẳng có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0) \quad (2)$$

đi qua hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$.

Phương trình dạng (2) được gọi là **phương trình đường thẳng theo đoạn chắn**.

[?4] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua $A(-1; 0)$ và $B(0; 2)$.



CHÚ Ý

Xét đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$.

Nếu $b \neq 0$ thì phương trình trên đưa được về dạng

$$y = kx + m \quad (3)$$

với $k = -\frac{a}{b}$, $m = -\frac{c}{b}$. Khi đó k là **hệ số góc** của đường thẳng Δ

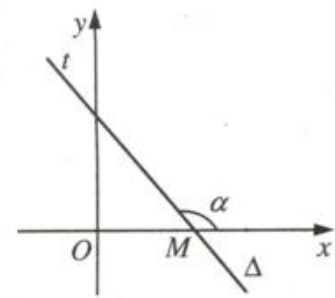
và (3) gọi là **phương trình của Δ theo hệ số góc**.

Ý nghĩa hình học của hệ số góc (h. 69)

Xét đường thẳng $\Delta : y = kx + m$.

Với $k \neq 0$, gọi M là giao điểm của Δ với trục Ox và Mt là tia của Δ nằm phía trên Ox . Khi đó, nếu α là góc hợp bởi hai tia Mt và Mx thì hệ số góc của đường thẳng Δ bằng *tang* của góc α , tức là $k = \tan \alpha$.

Khi $k = 0$ thì Δ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox .



Hình 69

[?5] Mỗi đường thẳng sau đây có hệ số góc bằng bao nhiêu? Hãy chỉ ra góc α tương ứng với hệ số góc đó.

a) $\Delta_1 : 2x + 2y - 1 = 0$;

b) $\Delta_2 : \sqrt{3}x - y + 5 = 0$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Vì số điểm chung của hai đường thẳng bằng số nghiệm của hệ gồm hai phương trình trên, nên từ kết quả của đại số ta có

a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

b) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

hoặc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

c) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Trong trường hợp a_2, b_2, c_2 đều khác 0, ta có

$$\Delta_1, \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2};$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2};$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

?6 Từ tỉ lệ thức $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, có thể nói gì về vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2 ?

?7 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1: \sqrt{2}x - 3y + 5 = 0$ và $\Delta_2: x + 3y - \sqrt{3} = 0$;

b) $\Delta_1: x - 3y + 2 = 0$ và $\Delta_2: -2x + 6y + 3 = 0$;

c) $\Delta_1: 0,7x + 12y - 5 = 0$ và $\Delta_2: 1,4x + 24y - 10 = 0$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Đường thẳng song song với trục Ox có phương trình $y = m$ ($m \neq 0$);

b) Đường thẳng có phương trình $x = m^2 + 1$ song song với trục Oy ;

c) Phương trình $y = kx + b$ là phương trình của đường thẳng;

d) Mọi đường thẳng đều có phương trình dạng $y = kx + b$;

e) Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

2. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng Ox ;

b) Đường thẳng Oy ;

c) Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox ;

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với Ox ;

e) Đường thẳng OM , với $M(x_0; y_0)$ khác điểm O .

3. Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

$$AB : 2x - 3y - 1 = 0 ;$$

$$BC : x + 3y + 7 = 0 ;$$

$$CA : 5x - 2y + 1 = 0.$$

Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ đỉnh B .

4. Cho hai điểm $P(4 ; 0), Q(0 ; -2)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $A(3 ; 2)$ và song song với đường thẳng PQ ;

b) Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng PQ .

5. Cho đường thẳng d có phương trình $x - y = 0$ và điểm $M(2 ; 1)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua điểm M .

b) Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d .

6. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm (nếu có) của chúng

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $5x + 2y - 3 = 0$;

b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0,5x - 1,5y + 4 = 0$;

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1,5 = 0$.