

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Giá trị lượng giác của một góc

– Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x; y)$. Khi đó

$$\sin \alpha = y,$$

$$\cos \alpha = x,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0),$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0).$$

– Hai góc bù nhau có *sin* bằng nhau ; còn *côsin*, *tang*, *côtang* của chúng đối nhau.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

– Tích vô hướng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

– Các tính chất

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} ;$$

$$2) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) ;$$

$$3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} ;$$

$$4) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 ;$$

$$5) \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

– Biểu thức toạ độ của tích vô hướng và khoảng cách giữa hai điểm

1) Nếu $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' ;$$

2) Nếu $M = (x_M; y_M)$, $N = (x_N; y_N)$ thì

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

3. Định lí côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

4. Định lí sin trong tam giác

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

5. Công thức trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

6. Các công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Phát biểu định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ. Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ là số dương, là số âm, bằng 0 ?
2. Để giải tam giác ta thường dùng định lí cosin trong những trường hợp nào ? Dùng định lí sin trong những trường hợp nào ?
3. Cho biết độ dài ba cạnh của tam giác. Làm thế nào để tính
 - a) Các góc của tam giác ?
 - b) Các đường cao của tam giác ?
 - c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ?
 - d) Diện tích tam giác ?
4. Trong mặt phẳng tọa độ, biết tọa độ ba đỉnh của tam giác, làm thế nào để tìm chu vi, diện tích, tọa độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ?

III - Bài tập

1. Chứng minh các công thức sau

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2); \quad \text{b) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$$

2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta luôn có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, trong đó k là một số cho trước.

3. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2,$$

trong đó k là một số cho trước.

4. Trên hình 63 có vẽ hai tam giác vuông cân ABC và $AB'C'$ có chung đỉnh A . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC' . Chứng minh rằng

a) $AI \perp CC'$, $AJ \perp BB'$;

b) $BC' \perp B'C$.

5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi N là trung điểm của CD , M là điểm trên AC sao cho

$$AM = \frac{1}{4}AC.$$

a) Tính các cạnh của tam giác BMN .

b) Có nhận xét gì về tam giác BMN ? Tính diện tích tam giác đó.

c) Gọi I là giao điểm của BN và AC . Tính CI .

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN .

6. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{e} = (4; 1)$ và $\vec{f} = (1; 4)$.

a) Tìm góc giữa các vectơ \vec{e} và \vec{f} .

b) Tìm m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành.

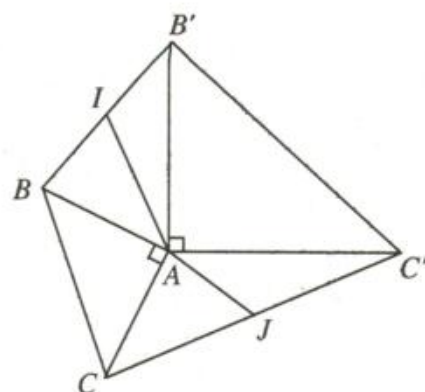
c) Tìm n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

7. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

8. Trong các tam giác có hai cạnh là a và b , tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

9. Cho tam giác ABC có $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$. Tính diện tích S , chiều cao h_a , các bán kính R , r của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đó.



Hình 63

10. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (S là diện tích tam giác ABC);

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

11. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên đường thẳng AB , lấy điểm C ở ngoài hai đường tròn và kẻ hai tiếp tuyến CE , CF đến hai đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng $CE = CF$.

12. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P .

IV - Bài tập trắc nghiệm

1. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu ?

(A) 1; (B) $\sqrt{2}$; (C) $\sqrt{3}$; (D) 0.

2. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?

(A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$; (B) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$;

(C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; (D) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

3. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai ?

(A) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$; (B) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$;

(C) $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$; (D) $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

4. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào không đúng ?

(A) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

(B) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

- (C) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;
 (D) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.
5. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?
 (A) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$; (B) $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$;
 (C) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$; (D) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.
6. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai** ?
 (A) $\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$;
 (B) $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$;
 (C) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$;
 (D) $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ}) \cdot (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.
7. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?
 (A) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; (B) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$;
 (C) $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$; (D) $\vec{a} = \pm |\vec{a}|$.
8. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (3 ; 4)$, $\vec{b} = (4 ; -3)$. Kết luận nào sau đây là **sai** ?
 (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$;
 (C) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$; (D) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$.
9. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (9 ; 3)$. Vectơ nào sau đây **không vuông góc** với vectơ \vec{a} ?
 (A) $\vec{v}(1 ; -3)$; (B) $\vec{v}(2 ; -6)$;
 (C) $\vec{v}(1 ; 3)$; (D) $\vec{v}(-1 ; 3)$.
10. Tam giác ABC có $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất ?
 (A) $\widehat{B} \approx 42^\circ 50'$; (B) $\widehat{B} \approx 60^\circ 56'$;
 (C) $\widehat{B} \approx 119^\circ 04'$; (D) $\widehat{B} \approx 90^\circ$.

11. Nếu tam giác MNP có $MP = 5$, $PN = 8$ và $\widehat{MPN} = 120^\circ$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là

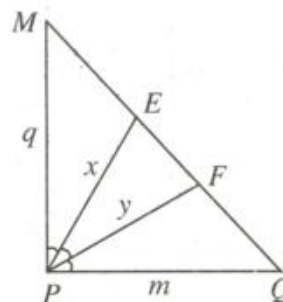
- (A) 11,4 ; (B) 12,4 ;
(C) 7,0 ; (D) 12,0.

12. Cho tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc MPE, EPF, FPQ bằng nhau.

Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$ (h. 64).

Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?

- (A) $ME = EF = FQ$;
(B) $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$;
(C) $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$;
(D) $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.



Hình 64

13. Tam giác ABC có $BC = 10$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

- (A) 5 ; (B) 10 ;
(C) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; (D) $10\sqrt{3}$.

14. Tam giác với ba cạnh là 5, 12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu ?

- (A) 30 ; (B) $20\sqrt{2}$;
(C) $10\sqrt{3}$; (D) 20.

15. Tam giác ABC có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

- (A) $\sqrt{3}$; (B) 4 ;
(C) 2 ; (D) 1.

16. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu ?

- (A) $5\sqrt{3}$; (B) $5\sqrt{2}$;
(C) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$; (D) 10.