

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Các định nghĩa

a) \vec{n} là một *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của \vec{n} vuông góc với Δ .

\vec{u} là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của \vec{u} song song hoặc trùng với Δ .

b) *Elip* : Tập các điểm M thoả mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ($F_1F_2 = 2c, 0 < c < a$).

Hypebol : Tập các điểm M thoả mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ($F_1F_2 = 2c, c > a > 0$).

Parabol : Tập các điểm M thoả mãn $MF = d(M ; \Delta)$ ($d(F ; \Delta) = p > 0$).

Đường cônic : Tập các điểm M thoả mãn $\frac{MF}{d(M ; \Delta)} = e > 0$.

Nếu $e < 1$ thì đường cônic là elip.

Nếu $e = 1$ thì đường cônic là parabol.

Nếu $e > 1$ thì đường cônic là hypebol.

2. Phương trình các đường

a) Phương trình đường thẳng

- Dạng tổng quát

$ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), $\vec{n}(a ; b)$ là một vectơ pháp tuyến.

- Dạng tham số

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

- Dạng chính tắc

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

Ở dạng tham số và dạng chính tắc, đường thẳng đi qua điểm $(x_0 ; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$.

b) Phương trình đường tròn

- Đường tròn tâm $I(x_0 ; y_0)$, bán kính R có phương trình

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

- Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn có tâm $I(-a ; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

c) Phương trình chính tắc của ba đường conic và các yếu tố liên quan

- Elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), $c^2 = a^2 - b^2$. Các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$; trục lớn $2a$, trục bé $2b$; tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$, đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e}$.

- Hypebol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), $c^2 = a^2 + b^2$. Các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$; trục thực $2a$, trục ảo $2b$; tâm sai $e = \frac{c}{a} > 1$, đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e}$, tiệm cận $y = \pm \frac{b}{a}x$.

- Parabol : $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2} ; 0\right)$, tâm sai $e = 1$, đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$.

3. Khoảng cách và góc

a) Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ là

$$d(M ; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(I ; R)$ khi và chỉ khi

$$d(I ; \Delta) = R.$$

c) Góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

được xác định bởi

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Cho biết toạ độ của hai điểm A và B . Làm thế nào để
 - a) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, B ?
 - b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $C(x_0 ; y_0)$ và vuông góc với AB ?
 - c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, biết tiếp tuyến đó song song với AB ?
2. Cho biết toạ độ ba đỉnh của một tam giác. Làm thế nào để
 - a) Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ?
 - b) Tìm toạ độ trực tâm tam giác ?
 - c) Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ?
3. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến và một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu Δ có phương trình như sau
 - a) $ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$;
 - b) $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$;
 - c) $\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} \quad (m \neq 0, n \neq 0)$.
4. Làm thế nào để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau hoặc song song với nhau, nếu biết phương trình của chúng ?
5. Có thể viết phương trình của một đường tròn khi biết những điều kiện nào (nếu một số trường hợp thường gặp) ?
6. Có thể viết phương trình chính tắc của elip, hyperbol, parabol khi biết những điều kiện nào (nếu một số trường hợp thường gặp) ?

7. Cho phương trình

$$ax^2 + by^2 = 1. \quad (1)$$

- a) Với điều kiện nào của a và b thì (1) là phương trình của một đường tròn ?
- b) Với điều kiện nào của a và b thì (1) là phương trình chính tắc của elip ?
Của hyperbol ?

III - Bài tập

1. Xét vị trí tương đối của các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau
 - a) $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : 2x + 3y - 5 = 0$;
 - b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$;
 - c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ và $\Delta_2 : 5x + 4y - 7 = 0$.
2. Cho đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 2 = 0$.
 - a) Viết phương trình của Δ dưới dạng tham số.
 - b) Viết phương trình của Δ dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.
 - c) Tính khoảng cách từ mỗi điểm $M(3 ; 5)$, $N(-4 ; 0)$, $P(2 ; 1)$ tới Δ và xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác MNP .
 - d) Tính các góc hợp bởi Δ và mỗi trục toạ độ.
3. Cho đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$ và điểm $A(2 ; 0)$.
 - a) Với điều kiện nào của x và y thì điểm $M(x ; y)$ thuộc nửa mặt phẳng có bờ là d và chứa gốc toạ độ O ? Chứng minh điểm A nằm trong nửa mặt phẳng đó.
 - b) Tìm điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng d .
 - c) Tìm điểm M trên d sao cho chu vi tam giác OMA nhỏ nhất.
4. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0 ; y_0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua I .
5. Một hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Biết hình bình hành đó có tâm đối xứng là $I(3 ; 5)$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành đó.

6. Cho phương trình

$$x^2 + y^2 + mx - 2(m+1)y + 1 = 0. \quad (1)$$

- a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn ?
 - b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn nói ở câu a).
7. a) Biết đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Chứng minh rằng phương tích của điểm $M(x_0 ; y_0)$ đối với đường tròn (C) bằng $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$.
- b) Chứng minh rằng nếu hai đường tròn không đồng tâm thì tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng (gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn).
8. Cho hai đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$ và $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Giả sử chúng cắt nhau ở hai điểm M, N . Viết phương trình đường thẳng MN .
9. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2 ; 3)$.
- a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) kẻ từ A .
 - b) Tính các khoảng cách từ A đến hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói ở câu a) và khoảng cách giữa hai tiếp điểm đó.
10. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hyperbol $(H) : \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.
- a) Tìm toạ độ các tiêu điểm của (E) và (H) .
 - b) Vẽ phác elip (E) và hyperbol (H) trong cùng một hệ trục toạ độ.
 - c) Tìm toạ độ các giao điểm của (E) và (H) .
11. Cho đường thẳng $\Delta : 2x - y - m = 0$ và elip $(E) : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- a) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?
 - b) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất ?
12. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- a) Xác định toạ độ hai tiêu điểm và các đỉnh của (E) .
 - b) Viết phương trình chính tắc của hyperbol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của elip (E) .

- c) Vẽ phác elip (E) và hyperbol (H) nói ở câu b) trong cùng một hệ trục tọa độ.
- d) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường conic nói trên.
- 13.** Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M trên (P) (M khác O), gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm của đoạn OM' . Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt parabol đã cho tại một điểm duy nhất.
- 14.** Cho parabol (P) : $y^2 = \frac{1}{2}x$. Gọi M, N là hai điểm di động trên (P) sao cho $OM \perp ON$ (M, N không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

IV - Bài tập trắc nghiệm

- Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?

(A) $\vec{n} = (2; -1)$; (B) $\vec{n} = (1; -1)$;
 (C) $\vec{n} = (2; 1)$; (D) $\vec{n} = (-1; 2)$.
- Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A = (-3; 2)$, $B = (-3; 3)$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?

(A) $\vec{n} = (6; 5)$; (B) $\vec{n} = (0; 1)$;
 (C) $\vec{n} = (-3; 5)$; (D) $\vec{n} = (-1; 0)$.
- Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x - y + 3 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$
- Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$?

(A) $\vec{n} = (2; -1)$; (B) $\vec{n} = (-1; 2)$;
 (C) $\vec{n} = (1; -2)$; (D) $\vec{n} = (1; 2)$.
- Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?

(A) $2x + 3y + 1 = 0$; (B) $x - 2y + 5 = 0$;
 (C) $2x - 3y + 3 = 0$; (D) $4x - 6y - 2 = 0$.

6. Đường thẳng nào song song với đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

7. Đường thẳng nào song song với đường thẳng $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

(A) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2t \end{cases}$.

8. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $4x - 3y + 1 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

9. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

(A) $2x + y + 1 = 0$;

(B) $x + 2y + 1 = 0$;

(C) $4x - 2y + 1 = 0$;

(D) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2}$.

10. Khoảng cách từ điểm $O(0 ; 0)$ đến đường thẳng $4x - 3y - 5 = 0$ bằng bao nhiêu ?

(A) 0 ;

(B) 1 ;

(C) -5 ;

(D) $\frac{1}{5}$.

11. Phương trình nào là phương trình của đường tròn có tâm $I(-3 ; 4)$ và bán kính $R = 2$?

(A) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$;

(B) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$;

(C) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$;

(D) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

12. Phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ là phương trình của đường tròn nào ?

(A) Đường tròn có tâm $(-1 ; 2)$, bán kính $R = 1$;

(B) Đường tròn có tâm $(1 ; -2)$, bán kính $R = 2$;

(C) Đường tròn có tâm $(2 ; -4)$, bán kính $R = 2$;

(D) Đường tròn có tâm $(1 ; -2)$, bán kính $R = 1$.

13. Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E) : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?

(A) $F_{1,2} = (\pm 1 ; 0)$;

(B) $F_{1,2} = (\pm 3 ; 0)$;

(C) $F_{1,2} = (0 ; \pm 1)$;

(D) $F_{1,2} = (1 ; \pm 2)$.

14. Elip $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ có tâm sai bằng bao nhiêu ?

(A) $e = \frac{3}{2}$;

(B) $e = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

(C) $e = \frac{2}{3}$;

(D) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

15. Cho elip có các tiêu điểm $F_1(-3 ; 0), F_2(3 ; 0)$ và đi qua $A(-5 ; 0)$. Điểm $M(x ; y)$ thuộc elip đã cho có các bán kính qua tiêu là bao nhiêu ?

(A) $MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x, MF_2 = 5 - \frac{3}{5}x$;

(B) $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x, MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x$;

(C) $MF_1 = 3 + 5x, MF_2 = -3 - 5x$;

(D) $MF_1 = 5 + 4x, MF_2 = 5 - 4x$.

16. Elip $(E) : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, với $p > q > 0$, có tiêu cự là bao nhiêu ?

(A) $p + q$;

(B) $p^2 - q^2$;

(C) $p - q$;

(D) $2\sqrt{p^2 - q^2}$.

17. Phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của đường nào ?

(A) Elip với trục lớn bằng $2a$, trục bé bằng $2b$;

(B) Hypebol với trục lớn bằng $2a$, trục bé bằng $2b$;

(C) Hypebol với trục hoành bằng $2a$, trục tung bằng $2b$;

(D) Hypebol với trục thực bằng $2a$, trục ảo bằng $2b$.

18. Cặp điểm nào là các tiêu điểm của hyperbol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$?

- (A) $(\pm 4; 0)$; (B) $(\pm \sqrt{14}; 0)$;
 (C) $(\pm 2; 0)$; (D) $(0; \pm \sqrt{14})$.

19. Cặp đường thẳng nào là các đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$?

- (A) $y = \pm \frac{5}{4}x$; (B) $y = \pm \frac{4}{5}x$;
 (C) $y = \pm \frac{25}{16}x$; (D) $y = \pm \frac{16}{25}x$.

20. Cặp đường thẳng nào là các đường chuẩn của hyperbol $\frac{x^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$?

- (A) $x = \pm \frac{p}{q}$; (B) $x = \pm \frac{q}{p}$;
 (C) $x = \pm \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$; (D) $x = \pm \frac{p^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$.

21. Đường tròn nào ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$?

- (A) $x^2 + y^2 = 25$; (B) $x^2 + y^2 = 7$;
 (C) $x^2 + y^2 = 16$; (D) $x^2 + y^2 = 9$.

22. Điểm nào là tiêu điểm của parabol $y^2 = 5x$?

- (A) $F(5; 0)$; (B) $F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$;
 (C) $F\left(\pm \frac{5}{4}; 0\right)$; (D) $F\left(\frac{5}{4}; 0\right)$.

23. Đường thẳng nào là đường chuẩn của parabol $y^2 = 4x$?

- (A) $x = 4$; (B) $x = -2$;
 (C) $x = \pm 1$; (D) $x = -1$.

24. Cônica có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là đường nào ?

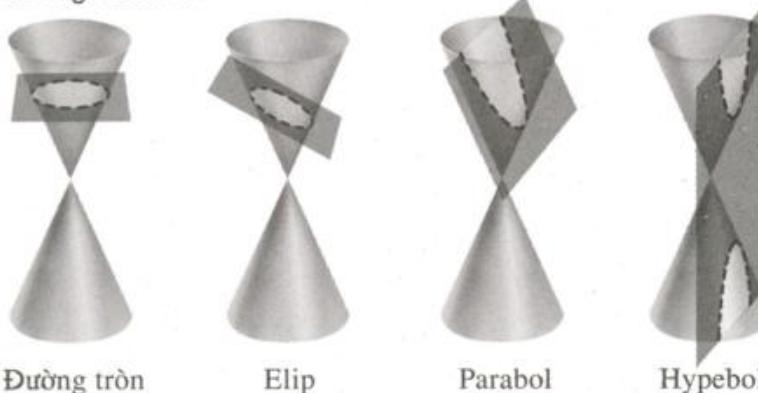
- (A) Hypebol; (B) Parabol ;
 (C) Ellip ; (D) Đường tròn.

Bài đọc thêm



VỀ BA ĐƯỜNG CÔNIC

1. Từ xa xưa, người Hi Lạp chứng minh được rằng giao tuyến của mặt nón tròn xoay và một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón là đường tròn hoặc đường cônic (elip, hyperbol, parabol) (h. 98). Tiếng Anh, từ *cone* có nghĩa là mặt nón, do đó có từ "đường cônic".

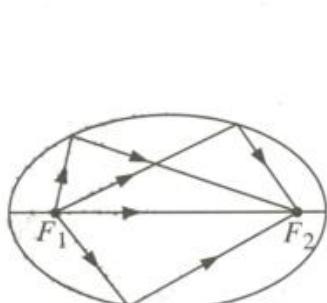


Hình 98

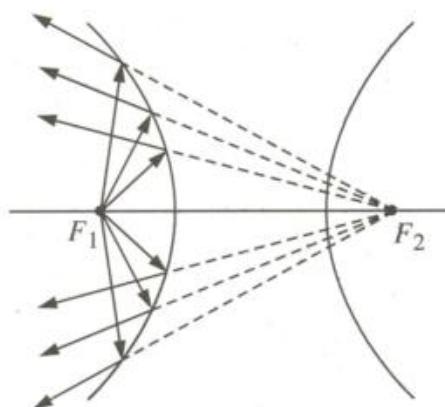
Ngay từ đầu thời kì A-lêch-xăng-đờ-ri (thời cổ Hy Lạp), người ta đã biết khá đầy đủ về các đường cônic qua bộ sách gồm 8 quyển của A-pô-lô-ni-ut (262 - 190 trước Công nguyên). Cuối thời kì đó, nhà toán học Hi-pa-chi-a (370 - 415 sau Công nguyên) đã công bố tác phẩm "Về các đường cônic của A-pô-lô-ni-ut".

Phải rất lâu sau đó, đến thế kỉ XVII, người ta mới tìm thấy những ứng dụng quan trọng của các đường đó trong sự phát triển của khoa học và kỹ thuật.

2. Ba đường cônic còn có nhiều tính chất chung. Tính chất quang học là một ví dụ : Một tia sáng phát ra từ một tiêu điểm của elip (hay hyperbol) sau khi đập vào elip (hay hyperbol) sẽ bị hắt lại theo một tia (tia phản xạ) nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm thứ hai của elip (hay hyperbol) (h. 99).

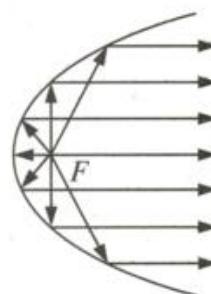


a)



b)

Hình 99

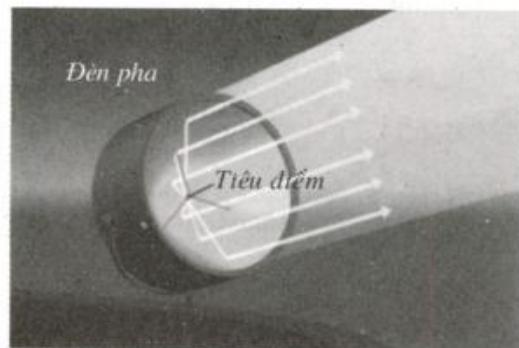


Hình 100

Với parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol (h. 100).

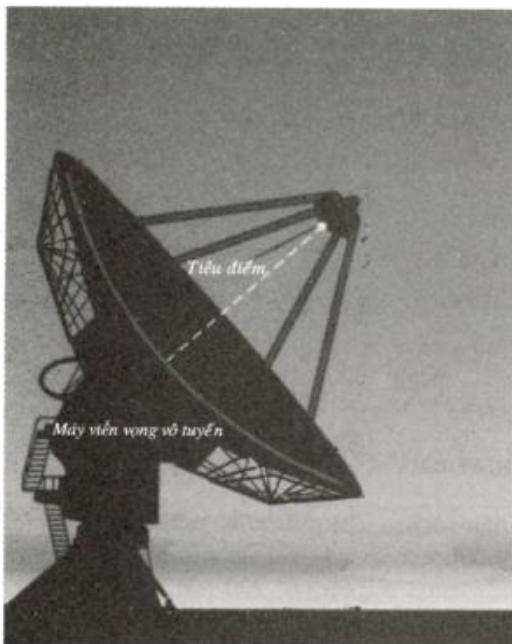
Tính chất này có nhiều ứng dụng, chẳng hạn :

- *Đèn pha* : Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó (h. 101).



Hình 101

- *Máy viễn vọng vô tuyến* cũng có dạng như đèn pha (h. 102). Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol.



Hình 102

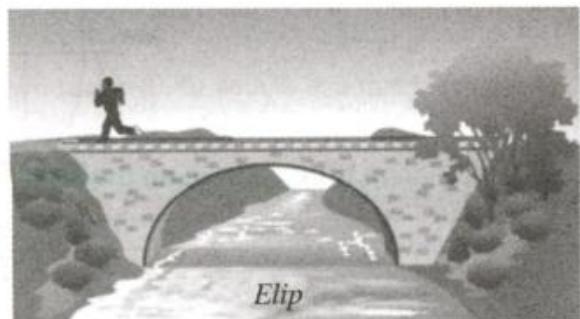


Hình 103

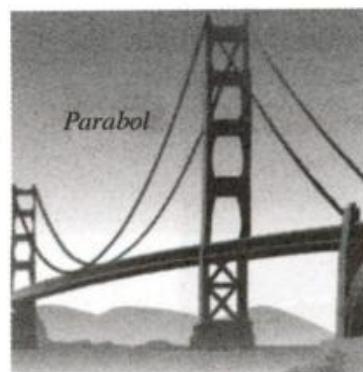
- Hình 103 là mô hình một lò phản ứng hạt nhân được xây dựng ở Mĩ. Mặt ngoài của lò là mặt tròn xoay tạo bởi một cung của hyperbol quay quanh trục ảo của nó.

3. Chúng ta đã biết quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời là đường elip. Đối với các vệ tinh nhân tạo và các con tàu vũ trụ, khi phóng lên, người ta phải tạo cho chúng có vận tốc thích hợp để được quỹ đạo là elip, hyperbol hoặc parabol.

Ngoài ra, người ta còn ứng dụng các tính chất của ba đường conic trong các ngành xây dựng, hàng không, hàng hải,... (h. 104).



a)



b)

Hình 104